ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ
ಅನುಮೋದಿಸಿದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಮೊದಲ ವರ್ಷ

ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ

ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ

ಪಿ ಯು ಸಿ ಮೊದಲ ವರ್ಷ

ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಕೇಂದ್ರ

ಸಲಹಾ ಸಮಿತಿ

ಸದಸ್ಯರು

ಡಾ. ಕೆ.ವಿ. ನಾರಾಯಣ

ಪ್ರೊ. ಲಕ್ಷ್ಮಣ್ ತೆಲಗಾವಿ

ಡಾ. ಕರೀಗೌಡ ಬೀಚನಹಳ್ಳಿ

ಡಾ. ಹಿ.ಚಿ. ಬೋರಲಿಂಗಯ್ಯ

ನಿರ್ದೇಶಕರು

ಡಾ. ಟಿ.ಆರ್. ಚಂದ್ರಶೇಖರ

ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು

ಜೈನುಲ್ಲಾ ಬಳ್ಳಾರಿ

ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ
ಅನುಮೋದಿಸಿದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

ಪಿ ಯು ಸಿ ಮೊದಲ ವರ್ಷ

ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ

ಸಂಪಾದಕ
ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್

ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ

GANITA VIJNANA - Mathematics
Prescribed Text Book for First Year P.U.C.

Edited by
Dr. S. Balachandra Rao
Retd. Principal and Professor of Mathematics
National College, Bangalore-4
2388, Jnana Deep, 13th Main
'A' Block, Rajajinagar II Stage
Bangalore 560 010

Published by
Dr. H.C. Boralingaiah
Director, Prasaranga
Kannada University, Hampi
Vidyaranya 583 276

Pages : xvi + 488 **Price: Rs. 160/-**
First Impression : 2004

www.kavihamp.org

ಬೆಲೆ : ರೂ. ೧೬೦/-

ಮುಖಪುಟ : **ಕೆ.ಕೆ. ಮಕಾಳಿ**

ಪ್ರಕಾಶಕರು
ಡಾ. ಹಿ.ಚಿ. ಬೋರಲಿಂಗಯ್ಯ
ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ
ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ ೫೮೩ ೨೭೬

ಅಕ್ಷರ ಸಂಯೋಜನೆ
ಫ್ರೆಂಡ್ಸ್ ಕಾಮ್-ಟೆಕ್
ನಂ. ೧೨೧/೧, ೫ನೇ ಮುಖ್ಯರಸ್ತೆ
ಚಾಮರಾಜಪೇಟೆ, ಬೆಂಗಳೂರು ೫೬೦ ೦೧೮
✆ ೨೬೫೨೮೪೫೪

ಮುದ್ರಣ
ವಿನಯ್ ಪ್ರಿಂಟ್ಸ್
ನಂ. ೨೦೫/೧, ೩ನೇ ಮುಖ್ಯರಸ್ತೆ, ೫ನೇ ಅಡ್ಡರಸ್ತೆ
ಚಾಮರಾಜಪೇಟೆ, ಬೆಂಗಳೂರು ೫೬೦ ೦೧೮
✆ ೨೬೬೦ ೬೯೯೬

ನಿರ್ದೇಶಕರ ಮಾತು

ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಕೇಂದ್ರವು ಶಿಕ್ಷಣದ ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು, ಆಕರ ಗ್ರಂಥಗಳು, ಪರಾಮರ್ಶನ ಕೃತಿಗಳು, ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಕೈಪಿಡಿಗಳು ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಮತ್ತು ಪ್ರಕಟಿಸುವ ದೊಡ್ಡ ಜವಾಬ್ದಾರಿಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿದೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ ೨೦೦೪-೦೫ರಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತಂದಿರುವ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಕೈಪಿಡಿಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಕೇಂದ್ರ ಆರಂಭಿಸಿದೆ.

ಈ ಕಾರ್ಯ ಅನೇಕರ ಸಹಕಾರ-ಸಹಯೋಗದಿಂದ ನಡೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಾವು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುತ್ತಿರುವ ಪಠ್ಯಗಳಿಗೆ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯು ಅಧಿಕೃತ ಪಠ್ಯಗಳೆಂದು ಮನ್ನಣೆ ನೀಡಿದೆ. ಇದು ತುಂಬಾ ಮಹತ್ವದ ಸಂಗತಿಯಾಗಿದೆ. ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಶ್ರೀ ಡಿ.ಎನ್. ನಾಯಕ್ ಇವರಿಗೆ ನಾವು ತುಂಬಾ ಕೃತಜ್ಞರಾಗಿದ್ದೇವೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಂಪಾದಕರಾಗಿ ನಾಡಿನ ಅನೇಕ ಹಿರಿಯ ವಿದ್ವಾಂಸರು ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಸಹಯೋಗದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಲೇಖಕರು ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಇವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ನಾನು ವಂದನೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಈ ಕೇಂದ್ರದ ಹಿಂದಿನ ಶಕ್ತಿಯೆಂದರೆ ಕುಲಪತಿಗಳಾದ ಡಾ. ಕೆ.ವಿ. ನಾರಾಯಣ. ಅವರ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರವು ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾನ್ಯ ಕುಲಪತಿಗಳಿಗೆ, ಕುಲಸಚಿವರಿಗೆ, ಕೇಂದ್ರದ ಸಲಹಾ ಮಂಡಳಿ ಸದಸ್ಯರಿಗೆ, ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕರು ಮತ್ತು ಸಿಬ್ಬಂದಿಗೆ ಕೇಂದ್ರದ ಪರವಾಗಿ ನಾನು ಕೃತಜ್ಞತೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಪ್ರಸ್ತುತ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯವನ್ನು ತುಂಬಾ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅದರ ಸಂಪಾದಕರಾದ ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್ ಅವರಿಗೆ ಹಾಗೂ ವಿವಿಧ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಿತ ತಜ್ಞರಾದ ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಕುಮಾರಿ, ಶ್ರೀಮತಿ ಚಂದ್ರಕಲಾ, ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಂತಿ ಪುರಂದರ್ ಅವರುಗಳಿಗೆ ನಾನು ವಂದನೆಗಳನ್ನು ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತೇನೆ.

–ಡಾ. ಟಿ. ಆರ್. ಚಂದ್ರಶೇಖರ

ಸಂಪಾದಕರ ಮಾತು

ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಾಗಿ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನದ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನೀಡಲು ಬಹಳ ಸಂತೋಷವಾಗುತ್ತಿದೆ. ೨೦೦೪-೦೫ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದಿಂದ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವು ಜಾರಿಗೆ ಬಂದಿರುವ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೊಸ ವಿಷಯಗಳನ್ನು, ಹೊಸ ಗಣಿತ-ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಹೆಚ್ಚು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

ಆಡುಭಾಷೆ ಕನ್ನಡದ ಮೂಲಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬ ದೃಢ ವಿಶ್ವಾಸದಿಂದ ಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು, ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನು, ಪ್ರಮೇಯ-ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಆದಷ್ಟು ಸರಳವಾದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಂದು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನದ ಮತ್ತು ಒಂದು ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕಾಪಾಡಿಕೊಂಡು ಬರಬೇಕಾದ ಭಾಷಾಗಾಂಭೀರ್ಯಕ್ಕೆ ಹಾಗೂ ನಿಖರತೆಗೆ ಕುಂದು ತಂದಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಸ್ತುತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷವಾದ ಅಂಶಗಳು :

(ಅ) ಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವೈವಿಧ್ಯಮಯವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

(ಆ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಧ್ಯಾಯದ - ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಉಪ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ- ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಲೆಕ್ಕಗಳ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೂ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

(ಇ) ಅನುಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಅಧಿಕೃತ ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು, ಗಣಿತದ ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು (ಎಸೈನ್ಮೆಂಟ್ಸ್) ಮತ್ತು ಯೋಜನೆ (ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ಸ್)ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

(ಈ) ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾದ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳನ್ನು (ಟೆಕ್ನಿಕಲ್ ಟರ್ಮ್ಸ್) ಪುಸ್ತಕದ ಕೊನೆಯಭಾಗದಲ್ಲಿ **ಕನ್ನಡ-ಇಂಗ್ಲಿಷ್** ಹಾಗೂ **ಇಂಗ್ಲಿಷ್-ಕನ್ನಡ** ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪಟ್ಟಿಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

(ಉ) ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಿಗದಿತ ಗಣಿತ-ಚಟುವಟಿಕೆ (ಎಸೈನ್ಮೆಂಟ್ಸ್) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಭಾರತೀಯ ಮತ್ತು ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಾಪಕಮಿತ್ರರಿಗೆ ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಪರಾಮರ್ಶನ (ಆಕರ) ಗ್ರಂಥಗಳ ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಹೊತ್ತಿಗೆಗಳು

ಸುಲಭವಾಗಿ ಲಭ್ಯವಾಗಿದ್ದು ಕಡಿಮೆ ದರದಲ್ಲೇ ಪ್ರಕಟವಾಗಿವೆ. ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಅವಕಾಶ ಒದಗಿರುವುದು ನಿಜಕ್ಕೂ ಸ್ತುತ್ಯ. ಇಂತಹ ಅಧ್ಯಯನದಿಂದಾಗಿ ನಮ್ಮ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ದೇಶದ ವಿಜ್ಞಾನ ಪರಂಪರೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಉಂಟಾಗಿರುವ ಕೀಳರಿಮೆ ಹೋಗಿ ನಿಜಕ್ಕೂ ಹೆಮ್ಮೆ ಮತ್ತು ಸ್ಫೂರ್ತಿ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ನಮ್ಮ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ನಿಷ್ಕಪಟ ಸಹಕಾರವೂ ಅಗತ್ಯ!

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಧ್ಯಾಯಗಳ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಸಕಾಲದಲ್ಲಿ ಬರೆದುಕೊಟ್ಟ ನಿಷ್ಠಾವಂತ ಸಹ-ಲೇಖಕರಾದ ಶ್ರೀಮತಿ ಚಂದ್ರಕಲಾ, ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಂತಿ ಪುರಂದರ್ ಮತ್ತು ಶ್ರೀಮತಿ ಜಯಕುಮಾರಿ ಇವರಿಗೆ ನಾನು ಆಭಾರಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ಕನ್ನಡಭಾಷೆಯ ಹಾಗೂ ಗಣಿತವಿಜ್ಞಾನದ ಈ ಅಳಿಲು ಸೇವೆಗೆ ಅವಕಾಶಮಾಡಿ ಕೊಟ್ಟ ಹಂಪಿಯ ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಎಲ್ಲಾ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ನನ್ನ ಮತ್ತು ಸಹ-ಲೇಖಕರ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು ಸಲ್ಲುತ್ತವೆ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಮತ್ತು ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಂದ ಸಲಹೆ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಆಹ್ವಾನಿಸುತ್ತೇನೆ.

2388, ಜ್ಞಾನದೀಪ, **13**ನೇ ಮುಖ್ಯರಸ್ತೆ
ಎ-ಬ್ಲಾಕ್, ರಾಜಾಜಿನಗರ **2**ನೇ ಹಂತ
ಬೆಂಗಳೂರು-**560 010**

–ಡಾ. ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್

ಪಿ.ಯು.ಸಿ. ಮೊದಲ ವರ್ಷ
ಪರಿಷ್ಕೃತ ಪಠ್ಯ

1 ಆಂಶಿಕ (ವಿಭಜಿತ) ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು — 4 ಗಂಟೆ

ಬಹುಘಾತಪದಿ, ಶುದ್ಧ ಮತ್ತು ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು, ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಬಹುಘಾತಪದಿ ಮತ್ತು ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ ಇಳಿಸುವುದು, ಲೆಕ್ಕಗಳು, ಶುದ್ಧಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ನಿಯಮಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

2 ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು — 5 ಗಂಟೆ

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ನಿರೂಪಣೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಹಾಗೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು. ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ನಿಯಮಗಳು (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತ), ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ವಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ.

3 ಗಣಿತಾನುಮಾನ — 5 ಗಂಟೆ

ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ತತ್ವ, ಗಣಿತಾನುಮಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ. $\sum n, \sum n^2, \sum n^3$ ಇವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

4 ಸಾಂತ (ಪರಿಮಿತ) ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತ — 5 ಗಂಟೆ

($\sum n, \sum n^2, \sum n^3$ ಮತ್ತು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ) (i) $1+(1+2)+(1+2+3)+........ n$ ಪದಗಳು, (ii) n ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು $1+3+6+10+\ldots n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, (iii) ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+.........$ ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

5 **ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ** **8 ಗಂಟೆ**

ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ : n ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವು n ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ರಚನಾಸೂತ್ರದ ಪುರ್ನನಿರೂಪಣೆ. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಐಕ್ಯ ಧಾತುವಿನ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು. ಘನ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಂಹಾಕಗಳ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧಗಳು, ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ, ಮೂಲಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು, ಗಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿಗಳೆಂದು ಸೂಚಿಸಿರುವ ಘನ ಸಮೀಕರಣ ಹಾಗೂ ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವುದು, ಸಂಯೋಜನ ಭಾಗಕ್ರಮ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಅಪರಿಮೇಯ (ಅಭಾಗಲಬ್ಧ) ಮೂಲಗಳು ಸಹವರ್ತಿ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವುವು ಮತ್ತು ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಮೂಲಗಳು ಸಹವರ್ತಿ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಸಂಭವಿಸುವುವು (ಸಾಧನೆ ರಹಿತ). ಅಪರಿಮೇಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

6 **ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ** **7 ಗಂಟೆ**

ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು $\left({}^nP_r\right)$ ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳು $\left({}^nC_r\right)$ ಇವುಗಳ ಪುರ್ನನಿರೂಪಣೆ

${}^nC_r = {}^nC_{r-1}$ ಮತ್ತು ${}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r$ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಾಧರ್ನೆಗಳು.

ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದ ನಿರೂಪಣೆ. ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ಮೂಲಕ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾಧಿಸುವುದು.

x ನಿಂದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಪದ, ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ x ನ ಘಾತಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳು. ದ್ವಿಪದೀಯ ಸಹಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೊತ್ತಗಳು :

i) $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots$

ii) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ldots\ldots$

iii) $C_0C_1 + C_1C_2 + \ldots\ldots$

7 ಗಣಿತ ತರ್ಕ 8 ಗಂಟೆ

ಉಕ್ತಿಗಳು, ಉಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ, ಸಂಯೋಜಕಗಳು, ಸಮುಚ್ಚಯ, ಪರ್ಯಾಯ ನಿಬಂಧಿತ, ಸಮತೋಕ್ತಿಗಳು, ನಕಾರ, ವಿಲೋಮ, ಪ್ರತಿಲೋಮ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಧನ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆ, ನಿತ್ಯಸತ್ಯಗಳು, ಅಸಮಂಜಸತೆ, ಪ್ರಮೇಯಗಳು, ಕೋಷ್ಟಕಗಳು. ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ಸ್, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

8 ಗಣಗಳು, ಸಂಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು 10 ಗಂಟೆ

ಗಣಗಳ ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ, ಉಪಗಣಗಳು, ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ, ಕಾರ್ಟಿಶಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸಂಬಂಧಗಳು, ಸಮಾನತೆ, ಪ್ರತಿಫಲನ ಹಾಗೂ ಸಮಾಂಗತೆ, ವಾಹಕ ಸಂಬಂಧಗಳ ನಿರೂಪಣೆ, ಉದಾಹರಣೆಗಳು, ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಛಾಯೆ, ಒಳಗಣ ಮತ್ತು ಮೇಳಣ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಸಮಸಂಯೋಗಿಗಳು, ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, ಏಕ - ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು - ಉತ್ಪನ್ನಗಳ, ವಿಧಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು - ಮಹಾಪೂರ್ಣಾಂಕ ಉತ್ಪನ್ನ, e^x ನ ನಕ್ಷೆ $\log_e x$ ನ ನಕ್ಷೆ, $|x|$ನ ನಕ್ಷೆ ಮತ್ತು $[x]$ನ ನಕ್ಷೆ.

9 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ 35 ಗಂಟೆ

ರೇಡಿಯನ್ ಮಾನ ನಿರೂಪಣೆ, π ರೇಡಿಯನ್ $= 180°$ ಅಥವಾ 1 ರೇಡಿಯನ್ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆ. $s = r\theta$ (θ ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿದೆ) ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ (θ ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿದೆ) ಎನ್ನುವುದರ ಸಾಧನೆ ಮತ್ತು ಲೆಕ್ಕಗಳು. ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು. ಲಘು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು, ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತ), ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು, ಸಂಯುಕ್ತಕೋನಗಳು, ಗುಣಿತ ಕೋನಗಳ, ಉಪಗುಣಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು, ರೂಪಾಂತರ ಸೂತ್ರಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ, ಉನ್ನತಕೋನ, ಅವನತಕೋನ - ಲೆಕ್ಕಗಳು - ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾದ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳು.

ತ್ರಿಕೋಣದ ಕೋನಗಳ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು, ಸೈನ್‌ನ ನಿಯಮ, ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ, ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ ನಿಯಮ, ಅರ್ಧಕೋನ ಸೂತ್ರ, ತ್ರಿಕೋಣದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ, ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ ನಿಯಮ (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತ). ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು :

ಅ) ಮೂರು ಭುಜಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ

ಆ) ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕೋನ ದತ್ತವಾದಾಗ

ಇ) ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜ ದತ್ತವಾದಾಗ

ಈ) ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದಕ್ಕೆ ಎದುರಿಗಿರುವ ಕೋನವು ದತ್ತವಾದಾಗ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

10 **ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ** **27 ಗಂಟೆ**

ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು, ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆ, ದೂರದ ಸೂತ್ರ, ವಿಭಜನ ಸೂತ್ರ, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂತ್ರ, ತ್ರಿಕೋಣದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಕೋಣದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ, ಸಾಧನೆಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಫಥ - ಲೆಕ್ಕಗಳು

ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು - ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $m = \tan\theta$, θವು x-ಅಕ್ಷದ (ಧನ ದಿಶೆಯ) ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಕೋನ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಓಟ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮತ್ತು ಲಂಬಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಿಯಮಗಳು, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ವಿವಿಧ ಸ್ವರೂಪಗಳು : ಓಟ - ಬಿಂದುರೂಪ, ಓಟ - ಛೇದಕರೂಪ, ದ್ವಿಬಿಂದು ರೂಪ, ಛೇದಕ ರೂಪ, ಲಂಬರೂಪ ಸಾಧನೆಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ, ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು, ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥದ ನಿಯಮ, ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವೊಂದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಲಂಬದ ಉದ್ದ, ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಆಂತರಿಕ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣ, ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳು. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು, ಸಮಾನ ಘಾತದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ, ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ.

ಸಾಧನೆಗಳು : 1) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಿಯಮ

2) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ

3) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಿರಲು ನಿಯಮ

4) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ, ಛೇದನ ಬಿಂದು

- ಇವುಗಳೆಲ್ಲದರ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

11 ಮಿತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ **07 ಗಂಟೆ**

ಚರಗಳು, ಸ್ಥಿರಗಳು, ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ವಿಧಗಳು, ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ, ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಅವಧಿಯುತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಿಕೆ. ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಮಿತಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಉತ್ಪನ್ನಮಿತಿಗಳು, ಉತ್ಪನ್ನ ಮಿತಿಯ ಗುಣಗಳು, ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ, ವಿಧಾನಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಮಿತಿಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳು (ಸಾಧನೆ ಸಹಿತ), ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಹಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಮಿತಿಗಳು (ಸಾಧನೆ ರಹಿತ), ಲೆಕ್ಕಗಳು. ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ, ನಿರೂಪಣೆ, ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

12 ನಕ್ಷೆಯ ಸಿದ್ಧಾಂತ **4 ಗಂಟೆ**

ಬಹುಮುಖಘನ, ನಕ್ಷೆ ಪುನರಾವರ್ತನೆ, ನಕ್ಷೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, ಪರಿಮಿತ, ಅಪರಿಮಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು, ಶೃಂಗಬಿಂದು, ಶೃಂಗಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಗ, ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಪರಿಮಾಣ, ಸುರಳಿ, ನಕ್ಷೆಗಳ ವಿಧಗಳು, ಎರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳು (ಸಾಧನೆಗಳ ಸಹಿತ).

(1) ಹಸ್ತಲಾಘವ ಗುಣ

(2) ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಬೆಸಶೃಂಗಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ನಡೆ, ಮಾರ್ಗ, ಮಂಡಲ, ಯೋಜಿತ ಮತ್ತು ವಿಯೋಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು, ಆಯ್ಲರನ ನಕ್ಷೆ, ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು ಮತ್ತು ಯೋಜನೆಗಳು

ಪರಿವಿಡಿ

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಆಂಶಿಕ (ವಿಭಜಿತ) ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

1.1 ಬಹುಘಾತಪದಿ :

ಬೀಜೋಕ್ತಿ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ ಯಲ್ಲಿ $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ ಗಳು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $a_0 \neq 0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಇಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವನ್ನು x ನ ಬಹುಘಾತಪದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಹುಘಾತಪದಿಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು n ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಬಹುಘಾತಪದಿಯಲ್ಲಿ x ನ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಾಂಕ n ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

1. $4x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5x + 3$ ಎಂಬುದು 4ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಬಹುಘಾತಪದಿ

2. $8x^5 - 3x^4 + 4$ ಎಂಬುದು 5ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಬಹುಘಾತಪದಿ. ಬಹುಘಾತಪದಿಗಳೂ (ವಿಶೇಷ ರೀತಿಯ) ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು. ನಾವು $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$..... ಮುಂತಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನ :

$f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಎನ್ನುವ ಎರಡು x ನ ಬಹುಘಾತಪದಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಭಾಗಲಬ್ಧ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$\dfrac{4x-5}{x^2+3x+2}$, $\dfrac{4x^3-3x^2+5}{(x+2)}$, $\dfrac{3x^2+4x+5}{x^2+2x-1}$ ಇವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು.

1.2 ಶುದ್ಧ ಮತ್ತು ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣವು $g(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ $f(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣವು $g(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಮತ್ತು $f(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣವು $g(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

$\frac{6x}{(x+1)(x+2)}$, $\frac{3x^2+2}{(x^2+3x+4)\,(x+5)}$ ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು.

$\frac{x^3-2x^2+4x+5}{(x-2)}$, $\frac{4x^2+3x+4}{x^2+1}$, $\frac{3x^2-2x+3}{2x^2+5}$ ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು.

ಯಾವುದೇ ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಒಂದು ಬಹುಘಾತಪದಿ ಅಥವಾ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಮತ್ತು ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು. (ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ವಿಂಗಡನೆಯು ಸುಲಭವಾಗುವುದು);

ಉದಾಹರಣೆಗೆ : ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ $\frac{2x^3-3x^2-7x+11}{(x-1)(x+2)}$

ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ :

$$
\begin{array}{r l}
x^2+x-2 \,\big)\, & \underline{2x^3-3x^2-7x+11}\,\big(\,2x \;\; -5 \\
& 2x^3+2x^2-4x \\
& \qquad \underline{-5x^2-3x+11} \\
& \qquad -5x^2-5x+10 \\
& \qquad\qquad 2x+1
\end{array}
$$

ಯಾವುದೇ ಭೀನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ನಾವು ಭಾಗಲಬ್ಧ $+\frac{\text{ಶೇಷ}}{\text{ಭಾಜ್ಯ}}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ $\frac{2x^3-3x^2-7x+11}{(x-1)(x+2)}=(2x-5)+\frac{2x+1}{(x^2+x-2)}$

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಸರಳ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಬೈಜಿಕ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು 'ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಆಂಶಿಕ ವಿಭಜನೆ' ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಸರಳ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಅಥವಾ ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ 'ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಆಂಶಿಕ ವಿಭಜನೆ' ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $\dfrac{2x^2+x+9}{x^3-2x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-3}$

ಬಲಬದಿಯ ಪದಗಳು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು.

1.3 ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನ

1ನೇ ವಿಧಾನ :

ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ $g(x)$ ನ್ನು ಅನೇಕ ರೇಖೀಯ (ಒಂದನೇ ದರ್ಜೆಯ) ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿ $(ax+b)$, $(cx+d)$ .... ಅಪವರ್ತಿಸಿಕೊಂಡಾಗ ಸಾಮಾನ್ಯ (ಸರಳ) ಅಪವರ್ತನಗಳು ಒಂದೇ ಸಲ ಇದ್ದರೆ ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಬರೆಯುವ ವಿಧಾನ

$\dfrac{A}{ax+b}, \dfrac{B}{cx+d}, \ldots\ldots\ldots\ldots .$

ಉದಾ : $\dfrac{5x-3}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-1}$ ಎಂದು ಎರಡು ಸರಳ ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. A ಮತ್ತು B ಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

2ನೇ ವಿಧಾನ : $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ನಲ್ಲಿ $g(x)$ನಲ್ಲಿ ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾ : 1. $\dfrac{2x+5}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{A}{(x+1)}+\dfrac{B}{(x-2)}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$

2. $$\frac{3x^2+5x-3}{(x-1)^2(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x+2)}+\frac{D}{(x+2)^2}$$

3ನೇ ವಿಧಾನ : $\frac{f(x)}{g(x)}$ ನಲ್ಲಿ $g(x)$ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ (ವರ್ಗ) ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ಅದನ್ನು ಸರಳ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದಾಗ ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ : $$\frac{(x+2)}{(3x+4)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{(3x+4)}+\frac{Bx+c}{\left(x^2+1\right)}$$

ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತಿದ್ದರೂ ಸಹ ಅದನ್ನು ನಾವು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು.

ಉದಾ :

$$\frac{(4x+5)}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+3\right)^3}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A_3x+B_3}{\left(x^2+3\right)}$$

$$+\frac{A_4x+B_4}{\left(x^2+3\right)^2}+\frac{A_5x+B_5}{\left(x^2+3\right)^3}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

1. $$\frac{(x+2)}{(x-3)(x-1)}$$

$$\frac{(x+2)}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-1)}$$

ಬಲಬದಿಗೆ ಲ. ಸಾ. ಅ. ವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\frac{(x+2)}{(x-3)(x-1)}=\frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

$$\therefore \quad (x+2) = A(x-1) + B(x-3) \qquad \text{... (1)}$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x = 1$ ಆದಾಗ

$$(1+2) = A(0) + B(1-3)$$

$$\therefore \quad -2B = 3 \qquad \text{ಅಥವಾ} \qquad B = -\frac{3}{2}.$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x - 3 = 0$ ಆಗುವಂತೆ $x = 3$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$3 + 2 = A(3-1) + B(0)$$

$$\therefore \quad 2A = 5 \qquad \text{ಅಥವಾ} \qquad A = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad \text{ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ} \quad \frac{x+2}{(x-3)(x-1)} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)}{(x-3)} + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{(x-1)}$$

2. $\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)}$.

$$\therefore \quad \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} \quad [\left(x^2-1\right) \text{ ಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಬೇಕು}]$$

$$\therefore \quad \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)}$$

ಲ. ಸಾ. ಅ. ವನ್ನು ಬಲಬದಿಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\therefore \quad x = A(x-1) + B(x+1) \qquad \text{...(1)}$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x - 1 = 0$ ಆಗುವಂತೆ $x = 1$ ನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ

$$1 = A(0) + B(1+1)$$

$\therefore \quad 2B = 1$ ಅಥವಾ $B = \frac{1}{2}$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x+1=0$ ಆಗುವಂತೆ $x=-1$ ಹಾಕಿದಾಗ

$-1 = A(-1-1) + B(0)$

$\therefore \quad -2A = -1, \quad \therefore \quad A = \frac{1}{2}.$

$\therefore$ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ $\dfrac{x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{(x+1)} + \dfrac{\frac{1}{2}}{(x-1)}$

3. $\dfrac{x^2+1}{x(x-3)(x-1)}$

$$\therefore \quad \frac{x^2+1}{x(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-1}$$

$$\therefore \quad \frac{\left(x^2+1\right)}{x(x-3)(x-1)} = \frac{A(x-3)(x-1) + Bx(x-1) + cx(x-3)}{x(x-3)(x-1)}$$

$\therefore \quad x^2+1 = A(x-3)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x-3) \quad \ldots (1)$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x=0$ ಹಾಕಿದಾಗ,

$0+1 = A(0-3)(0-1) + B(0)(0-1) + C(0)(0-3)$

$\therefore \quad 3A = 1$ ಅಥವಾ $A = \frac{1}{3}.$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x-1=0$ ಆಗುವಂತೆ $x=1$ ಹಾಕಿದಾಗ

$1+1 = A(1-3)(0) + B(1)(0) + C(1)(1-3)$

$\therefore \quad -2C = 2$ ಅಥವಾ $C = -1$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x-3=0$ ಆಗುವಂತೆ $x=3$ ಹಾಕಿದಾಗ

$10 = A(0)(3-1) + B(3)(3-1) + C(3)(0)$

$\therefore \quad 6B = 10$ ಅಥವಾ $\therefore \; B = \frac{5}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$$\frac{x^2+1}{x(x-3)(x-1)} = \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{(x-3)} + \frac{-1}{(x-1)}.$$

4. $\dfrac{(2x+5)}{(x-3)(x-1)^3}$.

$$\frac{(2x+5)}{(x-3)(x-1)^3} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

$(x-3)(x-1)^3$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$2x+5 = A(x-1)^3 + B(x-3)(x-1)^2 + C(x-3)(x-1) + D(x-3) \quad \dots (1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x-1=0$ ಆಗುವಂತೆ $x=1$ ಹಾಕಿದಾಗ,

$2(1)+5 = A(0) + B(1-3)(0) + C(0)(1-3) + D(1-3)$

$\therefore \quad -2D = 7 \qquad \therefore \; D = -\frac{7}{2}$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x=3$ ಹಾಕಿದಾಗ,

$2(3)+5 = A(3-1)^3 + B(0) + C(0) + D(0)$

$\therefore \quad 8A = 11 \qquad \therefore \quad A = \frac{11}{8}$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x=0$ ಮತ್ತು $x=-1$ ಹಾಕಿದಾಗ,

$B - C = \frac{11}{8} \qquad [x=0]$

$2B - C = 0 \qquad [x = -1]$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $B = -\frac{11}{8}$ ಮತ್ತು $C = -\frac{11}{4}$.

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$$\frac{2x+5}{(x-3)(x-1)^3} = \frac{\frac{11}{8}}{(x-3)} + \frac{\frac{-11}{8}}{(x-1)} + \frac{\frac{-11}{4}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{-7}{2}}{(x-1)^3}$$

ಅಥವಾ

$$\frac{11}{8(x-3)} - \frac{11}{8(x-1)} - \frac{11}{4(x-1)^2} - \frac{7}{2(x-1)^3}.$$

5. $\dfrac{2x^2+5}{x(x^2+3)}$

$$\frac{2x^2+5}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{(Bx+C)}{(x^2+3)}$$

$$= \frac{A(x^2+3)+(Bx+c)x}{x(x^2+3)}$$

$$\therefore \quad A(x^2+3)+(Bx+C)x = 2x^2+5$$

$$Ax^2 + 3A + Bx^2 + Cx = 2x^2 + 5$$

ಅಂದರೆ $(A+B)x^2 + Cx + 3A = 2x^2 + 5 \quad = 2x^2 + 0x + 5$

ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂಕಡೆಯ x^2, x ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$A + B = 2$, $C = 0$

$3A = 5 \qquad \therefore \qquad A = \frac{5}{3}$

$$A+B=2 \Rightarrow \frac{5}{3}+B=2 \qquad \therefore \qquad B=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$$\frac{2x^2+5}{x\left(x^2+3\right)}=\frac{\frac{5}{3}}{x}+\frac{\frac{1}{3}x}{x^2+3}=\frac{5}{3x}+\frac{x}{3\left(x^2+3\right)}$$

6. $\dfrac{x^2+9x+19}{x^2+7x+12}$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅಂಶದ ಪ್ರಮಾಣವು ಛೇದದ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ $+\dfrac{\text{ಶೇಷ}}{\text{ಭಾಜಕ}}$ ವನ್ನಾಗಿ ಮೊದಲು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

$$\frac{x^2+9x+19}{x^2+7x+12}=1+\frac{2x+7}{x^2+7x+12} \qquad \text{.... (1)}$$

$\dfrac{2x+7}{x^2+7x+12}$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬೇಕು.

$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$ (ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ)

$$\therefore \quad \frac{2x+7}{x^2+7x+12}=\frac{2x+7}{(x+3)(x+4)}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x+4)}$$

$$=\frac{A(x+4)+B(x+3)}{(x+3)(x+4)}$$

$$\therefore \quad 2x+7=A(x+4)+B(x+3) \qquad \text{.... (2)}$$

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ $x=-4$ ಹಾಕಿದಾಗ

$$-8+7=A(0)+B(-4+3)$$

$\therefore \quad -B=-1 \qquad \therefore \quad B=1$

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ $x=-3$ ಹಾಕಿದಾಗ

$2(-3)+7=A(-3+4)+B(0)$

$\therefore \quad A=1$

$$\therefore \quad \frac{2x+7}{x^2+7x+12}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}$$

ಇದನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ $\dfrac{x^2+9x+19}{x^2+7x+12}=1+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}$

7. $\dfrac{x^3+1}{x\left(x^2+2\right)^2}$

$$\frac{x^3+1}{x\left(x^2+2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{(Bx+C)}{\left(x^2+2\right)}+\frac{(Dx+E)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$\therefore \quad x^3+1=A\left(x^2+2\right)^2+(Bx+C)x\left(x^2+2\right)+(Dx+E)x \quad \ldots(1)$$

i.e $x^3+0x^2+0x+1=A\left(x^4+4x^2+4\right)+Bx^4+Cx^3+2Bx^2+$

$2Cx+Dx^2+Ex$

i.e $0x^4+x^3+0x^2+0x+1=(A+B)x^4+Cx^3+(4A+2B+D)x^2$

$+(2C+E)x+4A$

ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಕಡೆಯ x^4, x^3, x^2, x ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$A+B=0$, $C=1$, $4A+2B+D=0$, $2C+E=0$, $4A=1$.

$\therefore 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$ ಅಥವಾ $A + B = 0$, $\therefore$ $B = -\frac{1}{4}$

$2C + E = 0 \Rightarrow 2(1) + E = 0 \quad \therefore E = -2$

$4A + 2B + D = 0$

$4\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + D = 0 \quad \therefore \quad D = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$$\frac{x^3 + 1}{x\left(x^2 + 2\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{x} + \frac{\left(-\frac{1}{4}x + 1\right)}{\left(x^2 + 2\right)} + \frac{-\frac{1}{2}x + (-2)}{\left(x^2 + 2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4x} + \frac{-x + 4}{4\left(x^2 + 2\right)} - \frac{(x + 4)}{2\left(x^2 + 2\right)^2}$$

8. $\dfrac{3x^3 - 8x^2 + 10}{(x - 1)^4}$

$x - 1 = y$ ಹಾಕಿದಾಗ $x = y + 1$ ಆಗುವುದು.

$$3x^3 - 8x^2 + 10 = 3(y + 1)^3 - 8(y + 1)^2 + 10$$

$$= 3\left(y^3 + 1 + 3y^2 + 3y\right) - 8\left(y^2 + 2y + 1\right) + 10$$

$$= 3y^3 + y^2 - 7y + 5$$

$$\therefore \quad \frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{(x - 1)^4} = \frac{3y^3 + y^2 - 7y + 5}{y^4}$$

$\dfrac{3y^3 + y^2 - 7y + 5}{y^4} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{y^2} + \dfrac{C}{y^3} + \dfrac{D}{y^4}$ ಆಗಿರಲಿ. ... (1)

$\therefore \quad 3y^3 + y^2 - 7y + 5 = Ay^3 + By^2 + Cy + D$

y^3, y^2, y ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಎರಡು ಬದಿಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$A = 3$, $B = 1$, $C = -7$ ಮತ್ತು $D = 5$ ಬರುವುದು.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ

$$\frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{(x-1)^4} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y^3} + \frac{D}{y^4} \qquad [y = x-1]$$

$$= \frac{3}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-7}{(x-1)^3} + \frac{5}{(x-1)^4}$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 1

ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

1. $\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}$
2. $\dfrac{5x+2}{(1+3x)(1+2x)}$
3. $\dfrac{x^2-5}{(x-1)^2(x-2)}$
4. $\dfrac{\left(3x^2+2x-2\right)}{(x-1)^2(2x+1)}$
5. $\dfrac{1}{x^3(x+2)}$
6. $\dfrac{\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
7. $\dfrac{\left(3-7x^2\right)}{(1-3x)(1+2x)(1+x)}$
8. $\dfrac{2x^5}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}$
9. $\dfrac{1}{(1+x)^3(1-x)}$
10. $\dfrac{x}{(1+2x)^2(1-3x)}$

11. $\dfrac{x^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}$

12. $\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)(3-2x)}$

13. $\dfrac{3x^2+x-2}{x^2(x+3)^2}$

14. $\dfrac{1}{x^3+1}$

15. $\dfrac{x^3-5}{(x-1)^3(x+2)}$

16. $\dfrac{5x^2+1}{x^3-1}$

17. $\dfrac{2x^2+3x+4}{(x-1)\left(x^2+2\right)}$

18. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$

19. $\dfrac{5x^2-3x+4}{(x+1)\left(x^2-2x+6\right)}$

20. $\dfrac{x^4+2x+4}{\left(2x^2+3\right)(x-2)}$

21. $\dfrac{x^4+4x^3+7}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2}$

22. $\dfrac{x^2+x+1}{x(3x^2+1)^2}$

23. $\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+9\right)\left(x^2+16\right)}$

24. $\dfrac{x^4+2x+4}{\left(2x^2+3\right)(x-2)}$

ಅಧ್ಯಾಯ-2

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

2.1 ಪ್ರತಿಘಾತಗಳೆಂದರೇನು ?

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ **ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ** ವಿಷಯುವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಹಾರಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ಸಂಕಲನ ಹಾಗು ವ್ಯವಕಲನ ಸುಲಭಸಾಧ್ಯವಾದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು. ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗುಣಾಕಾರ ಹಾಗು ಭಾಗಾಹಾರಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಗಣಕಯಂತ್ರ, ಕ್ಯಾಲುಕ್ಯುಲೇಟರ್ ಮುಂತಾದುವುಗಳು ಬಳಕೆಗೆ ಬರುವ ಮುಂಚೆ ಸರಳವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದವು. ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲಿಗೆ ಜಾನ್ ನೆಪಿಯರ್ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಸುಮಾರು 1617ರ ವೇಳೆಗೆ ಹೆನ್ರಿ ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ಎನ್ನುವವರು 10ನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಆಧಾರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗುಣಾಕಾರ ಹಾಗು ಭಾಗಾಹಾರಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದ್ದರು.

a ಎನ್ನುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ $(\neq 1)$ ಮತ್ತು $y = a^x$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, x ನ್ನು a ಆಧಾರದ y ನ ಪ್ರತಿಘಾತ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ :

$$x = \log_a y .$$

ಉದಾ : $3^3 = 27 \qquad \therefore \quad 3 = \log_3 27$

$$10^3 = 1000 \qquad \therefore \quad 3 = \log_{10} 1000$$

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಆಧಾರವು e ಆದಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು 'ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು' ಮತ್ತು ಆಧಾರವು 10 ಇದ್ದಾಗ ಅವುಗಳನ್ನು 'ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು, ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಥಿರಾಂಕ e ನ ಬೆಲೆಯು ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಮತ್ತು 3 ಗಳ

ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವುದು. i.e., $2<e<3$.

ಸೂಚನೆ : ಸ್ಥಿರಾಂಕ e ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಸುಮಾರು ಬೆಲೆ 2.718281828459045……

2.2 ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಗುಣಗಳು

1. ಶೂನ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಿಟ್ಟು ಯಾವುದೇ ಆಧಾರದ ಪ್ರತಿಘಾತ 1 ರ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯ.

i.e., $\log_a 1=0 \quad (a\neq 0, a\neq 1)$

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $a^0=1 \qquad (a\neq 0)$.

$\therefore \quad \log_a 1=0$

2. ಯಾವುದೇ ಪ್ರತಿಘಾತದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

i.e., $\log_a a=1 \quad (a\neq 0, a\neq 1)$; $\log_{10} 10=1$, $\log_3 3=1$

ಏಕೆಂದರೆ, ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಹಾಗೆ $a^1=a$, $10^1=10$, $3^1=3$.

2.3 ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ನಿಯಮಗಳು

ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳ ನೇರವಾದ ಪ್ರತಿಫಲವೇ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ನಿಯಮಗಳು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಘಾತಾಂಕಗಳ ನಿಯಮ	ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ನಿಯಮ
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	1. $\log_a (mn)=\log_a m+\log_a n$
$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	2. $\log_a \left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n$
$(a^m)^n=a^{mn}$	3. $\log_a (m^n)=n\log_a m$

ಪ್ರಮೇಯ 1 :

$$\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$$

ಸಾಧನೆ : $\log_a m = x$, $\log_a n = y$ ಮತ್ತು $\log_a (mn) = z$ ... (1)

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೇಣ.

$\therefore m = a^x$, $n = a^y$ ಮತ್ತು $mn = a^z$ ... (2)

ಇದರಲ್ಲಿ $mn = a^z$ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆದರೆ $m = a^x$, $n = a^y$. ಇವುಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$a^x \cdot a^y = a^z \qquad \therefore \quad a^{x+y} = a^z$

ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲೂ ಆಧಾರ (a) ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $x + y = z$

ಅಂದರೆ, $\log_a m + \log_a n = \log_a mn$ [ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ]

ಪ್ರಮೇಯ 2 :

$$\log_a m - \log_a n = \log_a \left(\frac{m}{n}\right)$$

ಸಾಧನೆ :

$\log_a m = x$, $\log_a n = y$ **ಮತ್ತು** $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = z$ **... (1)**

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore \quad m = a^x$, $n = a^y$ ಮತ್ತು $\left(\frac{m}{n}\right) = a^z$ ... (2)

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ $\frac{m}{n} = a^z$ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$\frac{a^x}{a^y} = a^z \qquad \therefore \ a^{x-y} = a^z \qquad x - y = z$

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\log_a m - \log_a n = \log_a\left(\frac{m}{n}\right)$.

ಪ್ರಮೇಯ 3 :

$$\boldsymbol{log_a\left(m^n\right) = nlog_a m}$$

ಸಾಧನೆ :

$\log_a\left(m^n\right) = x$ ಮತ್ತು $\log_a m = y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore\ m^n = a^x$ ಮತ್ತು $m = a^y$. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$m^n = a^x \Rightarrow \left(a^y\right)^n = a^x$$

$$\therefore\ a^{ny} = a^x \qquad \therefore\ x = ny$$

ಅಂದರೆ, $\log_a\left(m^n\right) = n\log_a m$

ಪ್ರಮೇಯ 4 : ಆಧಾರದ ಪರಿವರ್ತನೆ

$$\boldsymbol{log_a N = \frac{log_e N}{log_e a}}$$

$\log_a N = x$, $\log_e N = y$, $\log_e a = z$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore\ N = a^x,\ N = e^y,\ a = e^z.$$

ಸಮೀಕರಣ $N = a^x$ ಇದರಲ್ಲಿ $a = e^z$ ನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ

$$N = \left(e^z\right)^x \qquad \therefore\ N = e^{zx}$$

ಆದರೆ $N = e^y \therefore e^y = e^{zx}\ or\ y = zx \quad \therefore\ x = \frac{y}{z}$

ಇದರಲ್ಲಿ $y = \log_e N$, $z = \log_e a$ ಮತ್ತು $x = \log_a N$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\log_a N = \dfrac{\log_e N}{\log_e a}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಉಪಪ್ರಮೇಯ :

ಪ್ರಮೇಯ 4 ರಲ್ಲಿ N ನ ಬದಲಿಗೆ e ಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$\log_a e = \dfrac{\log_e e}{\log_e a}$. ಆದರೆ, $\log_e e = 1$

$$\therefore \ \log_a e = \frac{1}{\log_e a}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(ಅ) ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\log_{32} 256$ 2. $\log_{2\sqrt{2}} 64$ 3. $\log_a 0.09 = 2$

4. $\log_y 0.008 = 3$ 5. $\log_x 256 = \dfrac{8}{5}$

ಉತ್ತರಗಳು :

1. $\log_{32} 256 = x$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore \quad (32)^x = 256$

$32 = 2^5$ ಮತ್ತು $256 = 2^8$. ಇವುಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$(2^5)^x = 2^8 \quad \therefore \quad 2^{5x} = 2^8 \quad \therefore \quad 5x = 8$ ಅಥವಾ $x = \dfrac{8}{5}$

$$\therefore \log_{32} 256 = \frac{8}{5}$$

2. $\log_{2\sqrt{2}} 64$

$\log_{2\sqrt{2}} 64 = x$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore \quad 64 = \left(2\sqrt{2}\right)^x$

ಆದರೆ $\quad 64 = 2^6$

$\therefore \quad (2)^6 = \left(2.2^{1/2}\right)^x = \left(2^{1+1/2}\right)^x$

$\therefore \quad 2^6 = \left(2^{3/2}\right)^x \qquad \therefore \quad \frac{3x}{2} = 6 \qquad \therefore \quad x = \frac{12}{3} = 4$

ಅಥವಾ $\quad 3x = 12$

$\therefore \quad \log_{2\sqrt{2}} 64 = 4$

3. $\quad \log_a 0.09 = 2$

$\therefore \quad a^2 = 0.09$ ಅಂದರೆ $a^2 = (0.3)^2$

$\therefore \quad a = 0.3$

4. $\quad \log_y 0.008 = 3$

$\therefore \quad y^3 = 0.008$ ಅಂದರೆ $y^3 = (0.2)^3$

$\therefore \quad y = 0.2$

5. $\quad \log_x 256 = \frac{8}{5}$

$\therefore \quad x^{8/5} = 256$

ಅಂದರೆ $x^{8/5} = 2^8 \qquad \therefore \quad x^8 = \left(2^8\right)^5$

ಅಥವಾ $x^8 = \left(2^5\right)^8$ $\qquad$ ಅಥವಾ $x^8 = (32)^8$

$\therefore \quad x = 32$

(ಅ) 1. $\qquad \log_{10}\frac{a}{b} + \log_{10}\frac{b}{c} + \log_{10}\frac{c}{a} = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\text{LHS} = \log_{10}\frac{a}{b} + \log_{10}\frac{b}{c} + \log_{10}\frac{c}{a}$$

$$= \log_{10}\left[\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{a}\right] = \log_{10} 1 = 0.$$

i.e., LHS = RHS

2. $\log_2\left\{\log_3\left(\log_2 x\right)\right\}=1$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತವಾಕ್ಯ $\log_2\left\{\log_3\left(\log_2 x\right)\right\}=1$

$\therefore \quad \log_3\left(\log_2 x\right) = 2^1 = 2$

$\therefore \quad \log_2 x = 3^2 = 9 \quad \therefore x = 2^9.$

ಅಂದರೆ $x = 512$

3. $\log_z\left(x^y\right)\log_x\left(y^z\right)\log_y\left(z^x\right) = xyz$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\text{LHS} = \log_z\left(x^y\right)\log_x\left(y^z\right)\log_y\left(z^x\right)$

$\text{LHS} = y\log_z x\cdot z\log_x y\cdot x\log_y z$

ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಆಧಾರವನ್ನು e ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ

$$\text{LHS} = y\cdot\frac{\log_e x}{\log_e z}\cdot z\cdot\frac{\log_e y}{\log_e x}\cdot x\cdot\frac{\log_e z}{\log_e y}$$

$= y\cdot z\cdot x$

$\therefore$ LHS $= xyz =$ RHS

4. $a^2+b^2=c^2$ ಆದರೆ $\frac{1}{\log_{c+b} a}+\frac{1}{\log_{c-b} a}=2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\text{LHS} = \frac{1}{\log_{c+b} a} + \frac{1}{\log_{c-b} a}$$

ಆಧಾರವನ್ನು e ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ

$$\text{LHS} = \frac{1}{\frac{\log_e a}{\log_e(c+b)}} + \frac{1}{\frac{\log_e a}{\log_e(c-b)}}$$

$$= \frac{\log_e(c+b)}{\log_e a} + \frac{\log_e(c-b)}{\log_e a} \quad = \frac{\log_e(c+b) + \log_e(c-b)}{\log_e a}$$

$$= \frac{\log_e[(c+b)(c-b)]}{\log_e a} \quad = \frac{\log_e\left(c^2 - b^2\right)}{\log_e a} \quad \ldots (1)$$

ಆದರೆ $a^2 + b^2 = c^2$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಅಂದರೆ $a^2 = c^2 - b^2$

ಇದನ್ನು ಫಲಿತಾಂಶ (1) ರಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದಾಗ

$$\therefore \quad \text{LHS} = \frac{\log_e a^2}{\log_e a} \quad = \frac{2\log_e a}{\log_e a} = 2$$

i.e., LHS = 2 = RHS

5. ಬಿಡಿಸಿ : $\log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 8 = 6$

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ

$\log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 8 = 6$

$\therefore \quad \log_x(2 \times 4 \times 8) = 6$

$\therefore \quad x^6 = 64$ ಅಂದರೆ $x^6 = 2^6 \quad \therefore \quad x = 2$

6. $\log x = \frac{1}{2}\log y = \frac{1}{5}\log z$ ಆದರೆ $x^4 y^3 z^{-2} = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪ್ರತಿಘಾತದ ಆಧಾರವನ್ನು e ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\log_e x = \frac{1}{2}\log_e y = \frac{1}{5}\log_e z = k$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad \log_e x = k\ ,\ \frac{1}{2}\log_e y = k$ ಮತ್ತು $\frac{1}{5}\log_e z = k$.

$\therefore \quad x = e^k\ ,\ \log_e y = 2k \quad \therefore y = e^{2k}$

$\frac{1}{5}\log_e z = k \quad \therefore \quad \log_e z = 5k \quad \therefore \quad z = e^{5k}$

ಈಗ $x^4 y^3 z^{-2} = \left(e^k\right)^4 \cdot \left(e^{2k}\right)^3 \cdot \left(e^{5k}\right)^{-2}$

$$= e^{4k} \cdot e^{6k} \cdot e^{-10k} \quad = e^{4k+6k-10k} \quad = e^0$$

$\therefore \quad x^4 y^3 z^{-2} = 1 \qquad [\because e^0 = 1]$

7. $2\log\frac{6}{7} + \frac{1}{2}\log\frac{81}{16} - \log\frac{27}{196} = \log 12$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$LHS = 2\log\frac{6}{7} + \frac{1}{2}\log\frac{81}{16} - \log\frac{27}{196}$$

$$= \log\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \log\left(\frac{81}{16}\right)^{1/2} - \log\left(\frac{27}{196}\right)$$

$$= \log\frac{36}{49} + \log\frac{9}{4} - \log\frac{27}{196}$$

$$= \log\left(\frac{36}{49} \times \frac{9}{4}\right) - \log\frac{27}{196}$$

$$= \log\left[\frac{\frac{36}{49} \times \frac{9}{4}}{\frac{27}{196}}\right] \quad = \log\left[\frac{36}{49} \times \frac{9}{4} \times \frac{196}{27}\right] \quad = \log 12 = \text{RHS}$$

8. $\log_{ab} x = \frac{\log_b x}{1+\log_b a}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇದನ್ನು

ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $\log_6 7 = \frac{\log_3 7}{1+\log_3 2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\log_{ab} x$ ಯಲ್ಲಿ ಆಧಾರವನ್ನು b ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸೋಣ.

$$\log_{ab} x = \frac{\log_b x}{\log_b ab} = \frac{\log_b x}{\log_b a + \log_b b}$$

$$= \frac{\log_b x}{(\log_b a + 1)} \qquad [\because \log_b b = 1]$$

ಈಗ $\log_6 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 2 + 1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$\log_6 7$ ನಲ್ಲಿ ಆಧಾರ 6ರ ಬದಲಿಗೆ 3 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\log_6 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 6}$$

$$= \frac{\log_3 7}{\log_3 (3\times 2)}$$

$$= \frac{\log_3 7}{\log_3 3 + \log_3 2}$$

$$\therefore \quad \log_6 7 = \frac{\log_3 7}{1+\log_3 2}$$

9. $x^{\log y - \log z} \cdot y^{\log z - \log x} \cdot z^{\log x - \log y} = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$x^{\log y - \log z} \cdot y^{\log z - \log x} \cdot z^{\log x - \log y} = p$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$\log\left[x^{\log y-\log z} \cdot y^{\log z-\log x} \cdot z^{\log x-\log y}\right]=\log p$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$\therefore \quad \log x^{\log y-\log z}+\log y^{\log z-\log x}+\log z^{\log x-\log y}=\log p$

i.e $\quad (\log y-\log z)\log x+(\log z-\log x)\log y+$

$(\log x-\log y)\log z=\log p$

ಅಥವಾ $\log y \log x-\log z \log x+\log z \log y-\log x \log y+$

$\log x \log z-\log y \log z=\log p$

$\therefore \quad \log p=0$

ಆಧಾರವನ್ನು $a \quad (a \neq 0, a \neq 1)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$\log_a p=0 \quad \therefore \quad p=a^0 \quad \therefore \quad p=1$

$\therefore$ LHS = 1 = RHS

10. $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$ ಆದಾಗ $a^2+b^2=7ab$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತವು $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$

$\therefore \quad 2\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\log a+\log b$

$2\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\log ab$

$\therefore \quad \log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=\log ab$

$\therefore \quad \left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab$ ಅಥವಾ $(a+b)^2=9ab$

ಅಂದರೆ $a^2+b^2+2ab=9ab$

ಅಥವಾ $a^2+b^2=7ab$.

11. $x=\log_a bc$, $y=\log_b ca$, $z=\log_c ab$ ಆದಾಗ $xyz=x+y+z+2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$x=\log_a bc \Rightarrow bc=a^x$

$y=\log_b ca \Rightarrow ca=b^y$

$z=\log_c ab \Rightarrow ab=c^z$

$a^x=bc$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಎರಡೂ ಕಡೆಯ ಘಾತವನ್ನು y ಗೆ ಏರಿಸಿದಾಗ,

$(a^x)^y=(bc)^y \quad \therefore \quad a^{xy}=b^yc^y$

ಮತ್ತು ಘಾತವನ್ನು z ಗೆ ಏರಿಸಿದಾಗ

$(a^{xy})^z=(b^y)^z(c^y)^z=(b^y)^z(c^z)^y$

ಆದರೆ $b^y=ca$, $c^z=ab$

$a^{xyz}=(ca)^z\cdot(ab)^y \quad =c^z\cdot a^z\cdot(ab)^y$

$=ab\cdot a^z\cdot a^y\cdot b^y \qquad [\because c^z=ab]$

$=aba^z\cdot a^y\cdot ca \qquad [\because b^y=ca]$

$=a^2a^z\cdot a^y\cdot bc \quad =a^{2+z+y}\cdot(a^x)$

$\therefore \quad a^{xyz}=a^{2+z+y+x}$ ಅಥವಾ $xyz=x+y+z+2$

12. $\log x+\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log\left(1+\frac{1}{1+x}\right)+$

$\log\left(1+\frac{1}{x+2}\right)=\log(x+3)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\text{LHS} = \log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log\left(1+\frac{1}{x+1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= \log x + \log\left(\frac{x+1}{x}\right)+\log\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)+\log\left(\frac{x+2+1}{x+2}\right)$$

$$\text{LHS} = \log\left\{x\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\right\} = \log(x+3) = \text{RHS}$$

13. x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ :

$\log_2(x+5)+\log_2(x-2)=3$

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ :

i.e $\log_2(x+5)+\log_2(x-2)=3$

$\log_2(x+5)(x-2)=3$

$\therefore \quad (x+5)(x-2)=2^3$

ಅಥವಾ $x^2+5x-2x-10=8 \quad \therefore \quad x^2+3x-18=0$

ಅಥವಾ $(x-3)(x+6)=0$

$\therefore \; x=3$ ಅಥವಾ $x=-6$

ಇಲ್ಲಿ $x=-6$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $(x+5)$ ಮತ್ತು $(x-2)$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುತ್ತವೆ.

$\therefore \; x=-6$ ನ್ನು ತ್ಯಜಿಸಿ $x=3$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

14. $x=\log_{2a} a$, $y=\log_{3a} 2a$, $z=\log_{4a} 3a$ ಆದರೆ $xyz+1=2yz$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$\text{LHS} = xyz+1$

$=(\log_{2a} a)(\log_{3a} 2a)(\log_{4a} 3a)+1$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಧಾರಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಬೇರೆಯ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಬದಲಿಸಿದಾಗ,

$$\text{LHS} = \frac{\log a}{\log 2a} \cdot \frac{\log 2a}{\log 3a} \cdot \frac{\log 3a}{\log 4a} + 1$$

$$= \frac{\log a}{\log 4a} + 1$$

$$= \frac{\log a + \log 4a}{\log 4a} = \frac{\log(4a \times a)}{\log 4a} = \frac{\log 4a^2}{\log 4a}$$

$$\text{LHS} = \frac{\log(2a)^2}{(\log 4a)} \quad = 2 \cdot \frac{\log 2a}{\log 4a} \qquad \dots (1)$$

$$\text{RHS} = 2yz$$

$$= 2 \cdot \log_{3a} 2a \cdot \log_{4a} 3a$$

$$= 2 \cdot \frac{\log 2a}{\log 3a} \cdot \frac{\log 3a}{\log 4a} \quad = 2\frac{\log 2a}{\log 4a} \qquad \dots (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\text{LHS} = \text{RHS}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

15. $\log\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ ಆದರೆ $x = y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\log\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$$

$$\therefore \quad 2\log\left(\frac{x+y}{2}\right) = \log x + \log y$$

$$i.e \log\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \log x + \log y \quad = \log xy$$

$$\therefore \quad \frac{(x+y)^2}{4} = xy$$

ಅಥವಾ $(x+y)^2 = 4xy \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 4xy$

ಅಥವಾ $x^2 + y^2 - 2xy = 0 \quad i.e \; (x-y)^2 = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \quad \Rightarrow x = y$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳಲ್ಲಿನ ಆಧಾರವು 10 ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಹರಣೆಗೆ:

$10^1 = 10 \Rightarrow \log_{10} 10 = 1$

$10^2 = 100 \Rightarrow \log_{10} 100 = 2$

$10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10} 1000 = 3$

.

.

.

.

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1 \Rightarrow \log_{10} 0.1 = -1$

$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01 \Rightarrow \log_{10} 0.01 = -2$

.

.

.

.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಸಂಪೂರ್ಣ 10 ರ ಘಾತದ ಪ್ರತಿಘಾತವು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. 10 ರ ಘಾತದ ಸಂಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ (integral part) ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಘಾತದಲ್ಲಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು 'ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗ' ಹಾಗೂ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯನ್ನು 'ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗ' (decimal part) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ :

1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವು (character) ದಶಾಂಶದ ಹಿಂದಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 1 ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಉದಾ:

25.4824 ರ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವು 1 ಆಗಿರುವುದು.

2.3642 ರ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವು 0 ಆಗಿರುವುದು.

3526.2041 ರ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವು 3 ಆಗಿರುವುದು.

1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಭಾಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ :

1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವು ದಶಾಂಶ ಮತ್ತು ಸಾರ್ಥಕ ಅಂಕಿಯ (significant digit) ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 1 ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿರುವುದು ಮತ್ತು ಯಾವಾಗಲೂ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದು.

ಉದಾ:

(i) 0.482 ರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗ

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು 0.1 ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇದೆ.

ಇದರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವು -1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು $\bar{1}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(ii) 0.0582 ರ ಪೂರ್ಣಾಂಕಭಾಗ

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 10^{-2} ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಮತ್ತು 10^{-1} ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ. ಇದರ ಪ್ರತಿಘಾತವು -2 ಮತ್ತು -1 ರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವುದು. ಇದರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವು -2 ಆಗಿರುವುದು. ಇದನ್ನು $\bar{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗ

ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಪ್ರತಿಘಾತದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು. ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾಂಶ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

8 ರ ಪ್ರತಿಘಾತದ ದಶಮಾಂಶಭಾಗವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು 80ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೋಡಬೇಕು.

ಆ್ಯಂಟಿಲಾಗ್

$\log x = y$ ಆದರೆ $x = \text{anti}\log y$.

ಆ್ಯಂಟಿಲಾಗ್ (antilog) ನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ದಶಾಂಶದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ನೋಡಬೇಕು.

ಉದಾ:

0.1752 ಗೆ ಆ್ಯಂಟಿಲಾಗ್ 1.497 ಆಗಿರುವುದು

1.1752 ಗೆ ಆ್ಯಂಟಿಲಾಗ್ 14.97 ಆಗಿರುವುದು

2.1752 ಗೆ ಆ್ಯಂಟಿಲಾಗ್ 149.7 ಆಗಿರುವುದು

$\bar{1}.1752$ ಗೆ ಆ್ಯಂಟಿಲಾಗ್ 0.1497

$\bar{2}.1752$ ಗೆ ಆ್ಯಂಟಿಲಾಗ್ 0.01497

$\bar{3}.1752$ ಗೆ ಆ್ಯಂಟಿಲಾಗ್ 0.001497

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1. ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\dfrac{0.9876 \times (16.42)^2}{(4.567)^{1/3}}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x = \dfrac{(0.9876) \times (16.42)^2}{(4.567)^{1/3}}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$\log x = \log 0.9876 + \log(16.42)^2 - \log(4.567)^{1/3}$$

$$= \log 0.9876 + 2\log(16.42) - \frac{1}{3}\log(4.567)$$

ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೋಡಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$\log 0.9876 = \bar{1}.9945$

$\log 16.42 = 1.2153$

$\log 4.567 = 0.6597$

$$\therefore \log x = \bar{1}.9945 + 2 \times 1.2153 - \frac{1}{3} \times 0.6597$$

$$= \bar{1}.9945 + 2.4306 - 0.2199$$

i.e $\log x = 2.2052$

$\therefore \quad x = \text{anti}\log(2.2052)$

ಅಂದರೆ $x = 160.4$

2. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ:- $\dfrac{3.274 \times 0.0059}{14.83 \times 0.077}$

$x = \dfrac{3.274 \times 0.0059}{14.83 \times 0.077}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \log x = \log\left[\frac{3.274 \times 0.0059}{14.83 \times 0.077}\right]$$

$$= \log 3.274 + \log(0.0059) - \log 14.83 - \log 0.077$$

$$= 0.5150 + \bar{3}.7709 - 1.1712 - \bar{2}.8865$$

$$\begin{array}{r} 0.5150 \\ +\bar{3}.7709 \\ \hline \bar{2}.2859 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.1712 \\ +\bar{2}.8865 \\ \hline 0.0577 \end{array}$$

$\therefore \bar{2}.2859$

$\dfrac{-0.0577}{2.2282}$ $\therefore \log x = \bar{2}.2282$

$\therefore \quad x = \text{antilog}(\bar{2}.2282) = 0.01691$

(ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ .2282 ಗೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ 1691 ಎಂದು ಬರುವುದು)

$$\therefore \quad \frac{3.274 \times 0.0059}{14.83 \times 0.077} = 0.01691$$

3. 3^{48} ರಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಗಳೆಷ್ಟು?

$x = 3^{48}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ 10 ರ ಆಧಾರದ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore \quad \log_{10} x = \log_{10} 3^{48}$

$\therefore \quad \log_{10} x = 48 \log_{10} 3$

$\log_{10} x = 48 \times 0.4771 \quad \Rightarrow \quad \log_{10} x = 22.9008$

ಆದ್ದರಿಂದ ಇರುವ ಅಂಕಗಳು $22 + 1 = 23$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $43 \times 8.07 \times 0.0392$

2. $31.9 \times 1.51 \times 9.7$

3. $\dfrac{2.38 \times 3.901}{4.83}$

4. $\dfrac{(4.321)^2 + (8.468)^2}{\sqrt{0.3645}}$

5. $\dfrac{3302.7 \times 14.3}{0.0561 \times 0.387 \times 0.0091}$

6. $\dfrac{\sqrt{0.01367 \times 0.0296}}{873.47}$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\log_{0.1} 100 = x$

2. $\log_{0.4} x = 3$

3. $\log_3 243 = x$

4. $(\log x)^2 - \log x - 6 = 0$

5. $\log x - 2\log\frac{6}{7} = \frac{1}{2}\log\frac{81}{16} - \log\frac{27}{196}$

6. $\log_4 x + \log_2 x = 6$

7. $\log_2[\log_3\{\log_2 x\}] = 1$

8. $\dfrac{\log_3 64}{\log_9 8} = x$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$ ಆದರೆ
$\log\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{1}{3}[\log x + \log y + \log z]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $x = \log_7 9$, $y = \log_5 7$, $z = \log_3 5$ ಆದರೆ $xyz = 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. (i) 5^{23} ರಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಗಳೆಷ್ಟು? (ii) 4^{333} ರಲ್ಲಿನ ಅಂಕಿಗಳೆಷ್ಟು?

4. $x^{\log_z y} = y^{\log_z x}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

5. $x^{\log y/z} \cdot y^{\log z/x} \cdot z^{\log x/y} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

6. $a^{3-x} \cdot b^{5x} = a^{x+5} \cdot b^{3x}$ ಆದರೆ $x\log\left(\frac{b}{a}\right) = \log a$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ಆದರೆ $2f(x)=f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. $\log_{10} m-\log_{10} n=\log_{10}(m-n)$ ಆದರೆ $m=\frac{n^2}{n-1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $x=\log_a bc$, $y=\log_b ca$, $z=\log_c ab$ ಆದರೆ

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅ. $\frac{\log_7 243}{\log_7 3}-\frac{\log_8 169}{\log_8 13}=3$

ಆ. $2\log\frac{16}{9}+\log\frac{27}{112}-\log\frac{16}{21}=0$

ಇ. $\frac{2}{3}\log 8+6\log\sqrt[3]{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{4}=5\log 2$

ಈ. $2\log\frac{6}{7}+\frac{1}{2}\log\frac{81}{16}-\log\frac{27}{196}=\log 12$

ಉ. $7\log\frac{16}{15}-5\log\frac{24}{25}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$

11. $abc=1$ ಆದರೆ $\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_b x}+\frac{1}{\log_c x}=0$

12. $\frac{\log x}{p-q}=\frac{\log y}{q-r}=\frac{\log z}{r-p}$ ಆದರೆ $x^p y^q z^r=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $a^2+b^2=7ab$ ಆದರೆ $\log\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}[\log a+\log b]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$, $y=10^{\frac{1}{1-\log x}}$ ಆದರೆ $z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ-3
ಗಣಿತಾನುಮಾನ

3.1 ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸಾಧನೆಯ ಕ್ರಮ

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಲವು ಮುಖ್ಯ ಪ್ರಮೇಯ ಅಥವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸುವುದು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಷ್ಟಕರವಾದ ವಿಷಯ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುವ ಹಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಗಣಿತಾನುಮಾನವು ಒಂದು ವಿಧ.

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯ ಅಥವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಮೂರು ಹಂತಗಳಿವೆ.

1. ಮೊದಲನೆಯ ಹಂತ

ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದತ್ತ ಸೂತ್ರವನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ, ದತ್ತ ಸೂತ್ರವನ್ನು n ನ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಬೆಲೆ ಅಂದರೆ $n = 1$ ಗೆ ತಾಳೆ ಹೊಂದುವುದೇ ಎಂದು ನೋಡುವುದು.

2. ಎರಡನೆಯ ಹಂತ

ದತ್ತ ಸೂತ್ರವು $n = m$ ಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ದತ್ತ ಸೂತ್ರವು $n = m + 1$ ಗೂ ಸಹ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು.

3. ಮೂರನೆಯ ಹಂತ

ನಿರ್ಧಾರ : ದತ್ತ ಸೂತ್ರವು $n = 1$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ; $n = m$ ಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ $n = m + 1$ ಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸೂತ್ರವು ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೊದಲ n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $\Sigma n = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n$

ಈಗ, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

i.e., $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ... (1)

ಹಂತ 1 :

ಸಮೀಕರಣ(1)ನ್ನು $n = 1$ಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. $n = 1$ ಎಂದು (1) ರಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದಾಗ,

$$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$P(1) : 1 = 1$ $\quad\therefore$ $P(1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಹಂತ 2:

ಗಣಿತವಾಕ್ಯ $P(n)$, $n = m$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ

$P(m) : 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + m = \dfrac{m(m+1)}{2}$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತವಾಕ್ಯ $P(n)$, $n = m + 1$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆಯೆ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕಾದರೆ, $P(m)$ ನ ಎಡಬದಿಯ ಕೊನೆಯ ಪದದಲ್ಲಿ m ಬದಲಿಗೆ $m + 1$ ನ್ನು ಹಾಕಿಕೊಂಡು ಈ ಪದವನ್ನು $P(m)$ನ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + m + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1)$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದಾಗ

$$\frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

ಅಂದರೆ $1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + (m+1) = \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$

ಇದು $P(n)$ ನಲ್ಲಿ n ನ ಬದಲು $(m + 1)$ ಹಾಕಿದಾಗ ಬರುವ

ಫಲಿತಾಂಶವಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ $P(m+1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದಾಯಿತು.

ಹಂತ 3 :

ನಿರ್ಧಾರ ಹಂತ 1ರಿಂದ $P(1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ, ಹಂತ 2ರಿಂದ $P(m)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ $P(m+1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ nನ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾಂಕಗಳಿಗೂ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಿತವಾಕ್ಯ $P(n)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

2. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ಹಂತ 1 : ದತ್ತವಾಕ್ಯವನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$P(n):1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$n=1$, $P(n)$ ನ ಎರಡೂ ಬದಿಗೆ ಹಾಕಿದಾಗ

$P(1)$ ಎಡಭಾಗ $=1^2=1$.

$$P(1)\text{ ಬಲಭಾಗ }=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=\frac{1(2)(3)}{6}=1.\ \therefore\ P(1)\text{ ಸತ್ಯ.}$$

ಹಂತ 2 : $P(m)$ ಸತ್ಯ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ,

$$P(m):1^2+2^2+\cdots\cdots+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

ಈಗ $P(m+1)$ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$P(m)$ ನ ಎಡಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಪದ m^2 ನ ಬದಲು $(m+1)^2$ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಗೂ ಕೂಡಿದಾಗ

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2+(m+1)^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2$$

$$=\frac{m(m+1)(2m+1)+6(m+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(m+1)}{6}\left[m(2m+1)+6(m+1)\right]$$

$$= \frac{(m+1)}{6}\left[2m^2+7m+6\right]$$

$$= \frac{(m+1)}{6}(m+2)\,(2m+3)$$

$$\therefore \quad 1^2+2^2+\cdots+m^2+(m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

ಇಲ್ಲಿ ಬಲಭಾಗದ ಪದಗಳು $P(m)$ ನ ಬಲಭಾಗದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ m ನ ಬದಲು $(m + 1)$ ಇರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

$\therefore$ $P\,(m + 1)$ ಸಹ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಹಂತ 3 : ನಿರ್ಧಾರ $P(1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ, $P\,(m)$ ಸತ್ಯವಿದ್ದರೆ $P\,(m + 1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸಹ $P\,(n)$ ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

ಹಂತ 1 : ದತ್ತವಾಕ್ಯವನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$P(n)\ :\ 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

$n = 1$ ನ್ನು $P\,(n)$ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ಹಾಕಿದಾಗ $P\,(1)$ ನ ಎಡಭಾಗ $= 1^3 = 1$

$$P\,(1) \text{ ನ ಬಲಭಾಗ } = \frac{1^2\,(1+1)^2}{4} = \frac{1\times 4}{4} = 1$$

$\therefore$ $P(1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಹಂತ 2 : $P(m)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$$P(m) : 1^3 + 2^3 + \cdots\cdots + m^3 = \frac{m^2 (m+1)^2}{4}$$

$P(m)$ ನ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ m^3 ಇಲ್ಲಿ m ಬದಲು $(m + 1)$ ಹಾಕಿದಾಗ ನಮಗೆ $(m+1)^3$ ಬರುವುದು.

$P(m)$ ನ ಎರಡೂ ಭಾಗಕ್ಕೆ $(m + 1)^3$ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$1^3 + 2^3 + \cdots\cdots + m^3 + (m+1)^3 = \frac{m^2 (m+1)^2}{4} + (m+1)^3$$

$$= \frac{m^2 (m+1)^2 + 4(m+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(m+1)^2}{4}\left[m^2 + 4(m+1)\right]$$

$$= \frac{(m+1)^2}{4}\left[m^2 + 4m + 4\right] \quad = \frac{(m+1)^2}{4}(m+2)^2$$

$\therefore \quad P(m+1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ $P(m)$ ಸತ್ಯವಾದರೆ $P(m+1)$ ಸತ್ಯ.

ಹಂತ 3 : ನಿರ್ಧಾರ : $P(1)$, $P(2)$ ……$P(m)$ ಹಾಗೂ $P(m+1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆಸುತ್ತಾ n ನ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ $P(n)$ ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

4. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ.

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2n}{n+1}$$

ಹಂತ 1 : ದತ್ತ ವಾಕ್ಯವನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

$$P(n) : 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2n}{n+1}$$

$n = 1$ನ್ನು $P(n)$ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ಹಾಕಿದಾಗ

ಎಡಭಾಗ = 1 ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗ = $\frac{2(1)}{(1+1)} = 1$ $\therefore$ $P(1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಹಂತ 2

$P(n)$ ನಲ್ಲಿ $n = m$ ಎಂದು ಹಾಕಿ $P(m)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ

$$P(m): 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+m} = \frac{2m}{m+1}$$

ಈಗ $P(m+1)$ ಕೂಡ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$P(m)$ ನ ಎಡಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಪದ $\frac{1}{1+2+3+\ldots+m}$ ನಲ್ಲಿ m ಬದಲು $(m+1)$ನ್ನು ಹಾಕಿ ಇದನ್ನು $P(m)$ನ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$1 + \frac{1}{1+2} + \ldots + \frac{1}{1+2+\ldots+m} + \frac{1}{1+2+\ldots+(m+1)}$$

$$= \frac{2m}{m+1} + \frac{1}{1+2+\ldots+(m+1)}$$

ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ

$$= \frac{2m}{m+1} + \frac{1}{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \quad \left(\because\ 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{2m}{m+1} + \frac{2}{(m+1)(m+2)}$$

$$= \frac{2m(m+2)+2}{(m+1)(m+2)} = \frac{2(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}$$

$$= \frac{2(m+1)}{(m+2)} = \frac{2(m+1)}{(m+1)+1}$$

$P(m+1)$ ಸಹ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಹಂತ 3

ನಿರ್ಧಾರ : $P(1), P(2), \ldots, P(m)$ ಸತ್ಯ ಮತ್ತು $P(m+1)$ ಕೂಡ ಸತ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣಿತಾನುಮಾನ ನಿಯಮದಂತೆ $P(n)$ ಸಹ n ನ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯ.

5. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ 'ಮೊದಲ n ಧನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ n^2' ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಂದರೆ $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 1 :

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

i.e., $P(n) : 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

$P(n)$ನಲ್ಲಿ $n = 1$ ನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ಹಾಕಿದಾಗ

$P(n)$ನ ಎಡಭಾಗ $= 1$, $P(n)$ನ ಬಲಭಾಗ $= 1^2 = 1$ $\therefore$ $P(1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಹಂತ 2 :

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು $P(m)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

i.e., $P(m) : 1+3+5+\ldots+(2m-1)=m^2$

ಈಗ $P(m+1)$ ಕೂಡ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$P(m)$ ನ ಎಡಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಪದ $(2m-1)$ ನಲ್ಲಿ m ನ ಬದಲಿಗೆ $(m+1)$ ನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ $\{2(m+1)-1\}=(2m+1)$ ಬರುವುದು. ಇದನ್ನು $P(m)$ನ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

i.e., $1+3+5+\ldots+(2m-1)+(2m+1)=m^2+2m+1$

ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ $(m+1)^2$ ಬರುವುದು

ಅಂದರೆ $1+3+5+\ldots+(2m+1)=(m+1)^2$

i.e., $P(m+1)$ ಕೂಡ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಹಂತ 3 :

ನಿರ್ಧಾರ : $P(1), P(2), \ldots P(m)$ ಸತ್ಯ ಹಾಗೂ $P(m+1)$ ಸಹ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಎಲ್ಲಾ n ನ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ $P(n)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

6. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ :

$$1.3+2.4+3.5+\ldots n=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

ಪ್ರತಿಪದದಲ್ಲಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ನಮಗೆ $1, 2, 3, \ldots n$ ಸಿಗುವುದು. ಇದು A.P. ಯಲ್ಲಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲಪದ $a=1$, ಸಾಮಾನ್ಯವ್ಯತ್ಯಾಸ $d=1$.

$\therefore$ n ನೇ ಪದ $T_n=a+(n-1)d=1+(n-1)1=n$.

ದತ್ತ ವಾಕ್ಯದ ಪ್ರತಿಪದದ ಎರಡನೆ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ $3, 4, 5, \ldots n$ ಸಿಗುವುದು. ಇದೂ ಸಹ A.P. ಯಲ್ಲಿ ಇದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $a=3, d=1$

$\therefore$ n ನೇ ಪದ $T_n=3+(n-1)1=n+2$.

$\therefore$ $1.3+2.4+3.5+\ldots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಹಂತ 1

ದತ್ತವಾಕ್ಯವನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$P(n): 1.3+2.4+3.5+\ldots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

$P(n)$ ನಲ್ಲಿನ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ $n=1$ ಎಂದು ಹಾಕಿದಾಗ

$P(n)$ನ ಎಡಭಾಗ = 1 . 3 = 3.

$P(n)$ನ ಬಲಭಾಗ $= \frac{1(1+1)(2+7)}{6} = \frac{(2)(9)}{6} = 3$

$\therefore$ $P(1)$ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಹಂತ 2

$P(n), n = m$ಗೆ ಸತ್ಯ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$$P(m): 1.3 + 2.4 + 3.5 + \ldots + m(m+2) = \frac{m(m+1)(2m+7)}{6}$$

ಈಗ $P(m+1)$ ಕೂಡ ಸತ್ಯ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

$P(m)$ನ ಎಡಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಪದ $m(m+2)$ನಲ್ಲಿ mನ ಬದಲಿಗೆ $(m+1)$ ಹಾಕಿದಾಗ ನಮಗೆ $(m+1)(m+3)$ ಬರುತ್ತದೆ. ಈ $(m+1)(m+3)$ ಯನ್ನು $P(m)$ನ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$1.3 + 2.4 + \ldots + m(m+2) + (m+1)(m+3)$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+7)}{6} + (m+1)(m+3)$$

ಬಲಭಾಗವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ.

$$= \frac{m(m+1)(2m+7)}{6} + (m+1)(m+3)$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+7) + 6(m+1)(m+3)}{6}$$

$$= \frac{(m+1)\left[m(2m+7) + 6(m+3)\right]}{6}$$

$$= \frac{(m+1)\ (2m^2 + 13m + 18)}{6}$$

$$= \frac{(m+1)\,(2m+9)(m+2)}{6}$$

ಇದು $P(n)$ ನ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ $m = m+1$ ಹಾಕಿದಾಗ ಬರುವ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $P(m+1)$ ಸಹ ಸತ್ಯ ಎಂದಾಯಿತು.

ಹಂತ 3:

ನಿರ್ಧಾರ : $P(1), P(2), \ldots, P(m)$ ಸತ್ಯ ಮತ್ತು $P(m+1)$ ಕೂಡ ಸತ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಕ್ರಮದಿಂದ n ನ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸಹ $P(n)$ ಸತ್ಯ.

ಅಧ್ಯಾಯ-4

ಸಾಂತ (ಪರಿಮಿತ) ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತ

$\Sigma n, \Sigma n^2, \Sigma n^3$ ಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಮೊತ್ತಗಳು

ಹಿಂದೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ನಾವು ಇತರ ಅನೇಕ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. $1.3.4+2.4.5+3.5.6+\ldots$ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

ದತ್ತ ವಾಕ್ಯದ ಮೊದಲ ಪದಗಳು 1, 2, 3, ... ಒಂದು A.P. ಆಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದ $a=1$, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d=1$.

ಇದರ n ನೆಯ ಪದ $t_n=1+(n-1)1=n$.

ದತ್ತವಾಕ್ಯದ ಎರಡನೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 3, 4, 5, ... ಒಂದು A.P.

ಇಲ್ಲಿ $a=3, d=1$ $\therefore$ n ನೆಯ ಪದ $t_n=3+(n-1)1=n+2$.

ದತ್ತ ವಾಕ್ಯದ ಮೂರನೆಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 4, 5, 6, ... ಒಂದು A.P.

ಇದರ n ನೆಯ ಪದ $t_n=4+(n-1)1=n+3$.

$\therefore$ ದತ್ತವಾಕ್ಯದ ಎಲ್ಲಾ ಶ್ರೇಢಿ ಪದಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ nನೆಯ ಪದ u_n ಆದರೆ

$$u_n=|n|(n+2)(n+3)=n^3+5n^2+6n$$

ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ $S_n=\Sigma u_n \quad =\Sigma n^3+\Sigma 5n^2+\Sigma 6n$

$$=\Sigma n^3+5\Sigma n^2+6\Sigma n$$

ಈಗ, $\Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$

ಹಾಕಿದಾಗ

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 5\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] + 6\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[3n^2 + 23n + 46\right]$$

2. $1^2 . 2 + 2^2 . 3 + 3^2 . 4 + \ldots$ ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ಮೊದಲನೇ ಅಪವರ್ತನಗಳು. $1^2, 2^2, 3^2, \ldots\ldots$ ಆಗಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿ 1, 2, 3, ... A.P. ಆಗಿದ್ದು $a = 1, d = 1$;

$A.P$ ಯ n ನೆಯ ಪದ $t_n = 1 + (n-1)1 = n$.

ಹಾಗೆಯೇ, ಎರಡನೇ ಅಪವರ್ತನಗಳಾದ

2, 3, 4, ... A.P. ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a = 2, d = 1$;

ಇದರ n ನೆಯ ಪದ $t'_n = 2 + (n-1)1 = (n+1)$.

$\therefore$ ದತ್ತವಾಕ್ಯದ ಎಲ್ಲಾ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೆಯ ಪದ u_n ಆದರೆ

$$u_n = (t_n)^2 t'_n = (n)^2(n+1)$$

ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ $S_n = \Sigma u_n = \Sigma n^2(n+1) = \Sigma n^3 + \Sigma n^2$

$$i.e \quad S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1) + 2(2n+1)]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[3n^2 + 7n + 2\right]$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

3. $\frac{1^2}{2}+\frac{1^2+2^2}{3}+\frac{1^2+2^2+3^2}{4}+\ldots$ ಈ ಶ್ರೇಢಿಯು n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ 2, 3, 4, ... ಗಳ n ನೆಯ ಪದ $(n+1)$.

ದತ್ತವಾಕ್ಯದ n ನೆಯ ಪದ $T_n=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{(n+1)}$

ಅಂದರೆ, $T_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)}=\frac{n(2n+1)}{6}$

ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ $S_n=\Sigma T_n$

$$i.e\ S_n=\Sigma\left\{\frac{n(2n+1)}{6}\right\}=\Sigma\frac{(2n^2+n)}{6}$$

$$=\frac{2}{6}\Sigma n^2+\frac{1}{6}\Sigma n$$

$$=\frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{36}\{2(2n+1)+3\}=\frac{n(n+1)(4n+5)}{36}.$$

4. $\frac{1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+n\text{ ಪದಗಳವರೆಗೆ}}{1.2+2.3+3.4+\ldots+n\text{ ಪದಗಳವರೆಗೆ}}=\frac{3}{4}(n+3)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಂಶದ n ನೆಯ ಪದ $t_n=n(n+1)(n+2)$.

ಛೇದದ n ನೆಯ ಪದ $t'_n=n(n+1)$.

ಅಂಶದಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ :

$$S_n=\Sigma t_n=\Sigma n(n+1)(n+2)$$

$$=\Sigma(n^3+3n^2+2n)=\Sigma n^3+3\Sigma n^2+2\Sigma n$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{3.n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2.n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{3n^2+3n+12n+6+12}{6}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+15n+18)=\frac{n(n+1)}{4}(n^2+5n+6)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

ಹಾಗೆಯೇ ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ :

$$S'_n=\Sigma t'_n=\Sigma n(n+1)=\Sigma n^2+\Sigma n$$

$$S'_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3}+1\right]$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ದತ್ತವಾಕ್ಯದ ಮೊತ್ತ R_n ಆದರೆ,

$$R_n=\frac{S_n}{S'_n}=\frac{\left\{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\right\}}{\left\{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right\}}$$

$$\therefore \quad R_n=\frac{3}{4}(n+3)$$

5. $11^3+12^3+13^3+\ldots+20^3=41075$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ವಾಕ್ಯದ ಎಡಭಾಗವನ್ನು S_n ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore \quad S_n = 11^3 + 12^3 + 13^3 + \ldots 20^3$

ಇದರ ಎರಡೂ ಕಡೆಗೆ $1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3$ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3 + S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3 + 11^3 + \ldots + 20^3$$

ಅಂದರೆ $\sum_{n=1}^{10} n^3 + S_n = \sum_{n=1}^{20} n^3$

$$\therefore \quad S_n = \sum_{n=1}^{20} n^3 - \sum_{n=1}^{10} n^3$$

ಆದರೆ, $\Sigma n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

$$\therefore \quad S_n = \frac{(20)^2 (21)^2}{4} - \frac{(10)^2 (11)^2}{4} = 44100 - 3025 = 41075$$

$$\therefore \quad 11^3 + 12^3 + \ldots + 20^3 = 41075\cdot$$

6. ಸಮಾಂತರ (A.P.) ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ n ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$A.P$ ಯ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆಗಿರಲಿ.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ

$$S_n = a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 + \ldots\ldots \{a+(n-1)d\}^2$$

$$= a^2 + \left(a^2 + 2ad + d^2\right) + \left(a^2 + 4ad + 4d^2\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \left\{a^2 + 2(n-1)ad + (n-1)^2 d^2\right\}$$

$$= na^2 + 2ad\{1 + 2 + \ldots + (n-1)\} + d^2\left\{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right\}$$

$$= na^2 + n(n-1)ad + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)d^2$$

$$S_n = \frac{n}{6}\left[6a^2 + 6(n-1)ad + (n-1)(2n-1)d^2\right]$$

7. $(4^n + 3n)$ ಪದವುಳ್ಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$S_n = \Sigma(4^n + 3n) = \Sigma 4^n + 3\Sigma n$$

$\Sigma 4^n = 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots n$ ಪದಗಳವರೆಗೆ.

ಇದು G.P. ಆಗಿದೆ. ಮೊದಲ ಪದ $a = 4$ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $r = 4$ ಆಗಿದೆ.

$\therefore \quad \Sigma 4^n = \frac{4(4^n - 1)}{3}$. ಹಾಗೆಯೇ, $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$

ಇವುಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$S_n = \frac{4(4^n - 1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 4

ಅ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಸಾಧಿಸಿ.

1. $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots n$ ಪದಗಳು $= \frac{n(3n-1)}{2}$.

2. $1.2 + 2.5 + 3.8 + 4.11 + \ldots n$ ಪದಗಳು $= n^2(n+1)$.

3. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + n$ ಪದಗಳು $= \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

4. $1.4 + 4.7 + 7.10 + \ldots n$ ಪದಗಳು $= n(3n^2 + 3n - 2)$.

5. $1+3+6+10+\ldots n$ ಪದಗಳು $=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

6. $1.2+3.4+5.6+\ldots n$ ಪದಗಳು $=\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{3}$.

7. $1+3+5+7+\ldots(2n-1)=n^2$.

8. $1^2+4^2+7^2+\ldots(3n-2)^2=\dfrac{n}{2}(6n^2-3n-1)$.

9. $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

10. $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

11. $1.2.2+2.3.3+3.4.4+\ldots+n(n+1)(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$

12. $1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$.

ಆ. $\Sigma n, \Sigma n^2, \Sigma n^3$ ಇತ್ಯಾದಿ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $1.2+4.5+7.8+\ldots n$ ಪದಗಳು.
2. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots n$ ಪದಗಳು.
3. $1.4+3.7+5.10+7.13+\ldots n$ ಪದಗಳು.
4. $1.2+2.3+3.4+\ldots n$ ಪದಗಳು.
5. $2^2+4^2+6^2+\ldots n$ ಪದಗಳು.
6. $2.3^2+4.5^2+6.7^2+\ldots n$ ಪದಗಳು.
7. $10^2+11^2+12^2+\ldots+23^2+24^2$.
8. $2.5+3.7+4.9+5.11+\ldots n$ ಪದಗಳು.

9. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots n$ ಪದಗಳು.

10. $1^3 + \frac{1^3 + 2^3}{1+2} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots}{1+2+3+\ldots} + \ldots\ldots n$ ಪದಗಳು.

11. $1.3.5 + 3.6.8 + 5.9.11 + \ldots n$ ಪದಗಳು.

12. $1 + (3+5) + (7+9+11) + \ldots n$ ಪದಗಳು.

13. $\sum\left(8n^3 + 4n^2 - 4n\right)$

14. $\sum\{(n+2)(2n+1)(3n-7)\}$

15. $15^2 + 16^2 + 17^2 + \ldots + 30^2 = 8440$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ - 5

ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ

5.1 ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ

ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ "ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯ" ಎಂದು ಕರೆಯುವುದು ವಾಡಿಕೆ.

ಪ್ರಮೇಯ :

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಘಾತೀಯ ಸಮೀಕರಣವೂ ಕನಿಷ್ಟಪಕ್ಷ ಒಂದು ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಒಂದು n ದರ್ಜೆಯ ಬಹುಘಾತೀಯ ಸಮೀಕರಣವೂ ಗರಿಷ್ಟಪಕ್ಷ n ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ವಿವರಣೆ : $a_0, a_1, a_2 ...., a_n$ ಎಂಬುದು ನೈಜ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ

$$p(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0 \qquad .... (1)$$

ಎಂಬ ಮಾದರಿಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು n ದರ್ಜೆಯ ಘಾತೀಯ ಸಮೀಕರಣವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಘಾತಾಂಕಗಳಾದ $n, n-1, n-2, n-3 ....., 1$ ಎಲ್ಲಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು.

ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ x ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ x^1 ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಬಹುಘಾತದ ಬೆಲೆ $p(x_1)$ ಶೂನ್ಯವಾದರೆ ಆಗ x_1 ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಒಂದು ಮೂಲ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $p(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ದ್ವಿತೀಯ ದರ್ಜೆಯ (ವರ್ಗ) ಸಮೀಕರಣ. ಇದರ ಮೂಲಗಳು $x = 2$ ಮತ್ತು $x = 3$.

5.2.1 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ

ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad ... (1)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು ; ಇಲ್ಲಿ $a \neq 0$.

ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞ **ಶ್ರೀಧರಾಚಾರ್ಯ**ನ (ಕ್ರಿ.ಶ. 9-10ನೇ ಶತಮಾನ) ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಬಹುದು :

ಸಮೀಕರಣ (1)ನ್ನು $4a$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

ಅಥವಾ

$$4a^2x^2+4abx=-4ac$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಗೂ b^2 ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$(2ax)^2+2(ax)(b)+b^2=b^2-4ac$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

ಅಥವಾ $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

ಅಥವಾ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ .... (2)

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

5.2.2 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ

ಸೂತ್ರ (2) ರಿಂದಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ಮತ್ತು

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ಎಂಬುದಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a, b, cಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ $a\neq0$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, **ಶೋಧಕ** (b^2-4ac) ಎಂಬುದು (i) ಧನವಾಗಿಯೋ, (ii) ಋಣವಾಗಿಯೋ ಅಥವಾ (iii) ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಯೋ ಇರಬಹುದು. ಈ ಮೂರು

ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿವೆ :

ಸಂದರ್ಭ (i) : ಶೋಧಕ $b^2-4ac>0$ ಆದಾಗ, ಮೂಲಗಳಾದ α ಮತ್ತು β ಎರಡೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.

ಸಂದರ್ಭ (ii) : ಶೋಧಕ $b^2-4ac=0$ ಆದಾಗ, ಮೂಲಗಳಾದ α ಮತ್ತು β ಎರಡೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಸಮನಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ,

$$\alpha=\beta=\frac{-b}{2a}$$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಂದರ್ಭ (iii) : ಶೋಧಕ $b^2-4ac<0$. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ α ಮತ್ತು β ಮೂಲಗಳೆರಡೂ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಅವುಗಳು $(g\pm ih)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ g ಮತ್ತು h ಎರಡೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು $i=\sqrt{-1}$ ಎಂಬುದು ಊಹ್ಯಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. "ಎಲೈ ಬಾಲೆ, ಹಂಸ ಸಮೂಹದ ವರ್ಗಮೂಲದ ಅರ್ಧದ ಏಳರಷ್ಟು ಹಂಸಗಳು ನದಿಯ ತೀರದಲ್ಲಿ ವಿಲಾಸದಿಂದಾಗಿ ಆಯಾಸಗೊಂಡು ಮೆಲ್ಲಮೆಲ್ಲನೆ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದವು. ಉಳಿದ ಎರಡು ಹಂಸಗಳು ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರೇಮ ಕಲಹದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದ್ದರೆ. ಸಮೂಹದಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳು" - (ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರ ***ಲೀಲಾವತೀ)***

ಸಮೂಹದಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

ನದಿಯ ತೀರದಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $\frac{7}{2}\sqrt{x}$

ಮತ್ತು ನೀರಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 2.

ಹಂಸಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ = $\frac{7}{2}\sqrt{x}+2$.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮೂಹದಲ್ಲಿದ್ದ ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$\frac{7}{2}\sqrt{x}+2=x$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{7}{2}\sqrt{x}=x-2$$

ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ

$$\frac{49x}{4}=(x-2)^2$$ ಅಥವಾ $4x^2-65x+16=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$(4x-1)(x-16)=0$$

ಅಥವಾ $x=1/4$ ಮತ್ತು $x=16$ ಎಂಬ ಮೂಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಹಂಸಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಅಂದರೆ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $x=1/4$ ಎಂಬ ಮೂಲವು ಗ್ರಾಹ್ಯವಲ್ಲ. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ $x=16$ ಎಂಬುದು.

2. ಆನೆಗಳ ಒಂದು ಹಿಂಡಿನ 1/3 ಭಾಗ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಭಾಗದ ವರ್ಗಮೂಲದ ಮೂರರಷ್ಟು ಬೆಟ್ಟದ ತಪ್ಪಲಿನಲ್ಲಿತ್ತು. ಒಂದು ಸಲಗವು (ಗಂಡು ಆನೆ) ಸರೋವರದಲ್ಲಿ ಮೂರು (ಹೆಣ್ಣು) ಆನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ರಾಸಕ್ರೀಡೆಯಾಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಆನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ? - (ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯರ ***ಗಣಿತಸಾರ ಸಂಗ್ರಹ)***

ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಒಟ್ಟು ಆನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\frac{x}{3}+3\sqrt{(2/3)x}+1+3=x$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$3\sqrt{(2/3)x}=\frac{2x}{3}-4$$

ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ, ಆನಂತರ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ

$$9\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{4(x-6)^2}{9}$$

ಅಥವಾ $2x^2-51x+72=0$

ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ ಉಂಟಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$(2x-3)(x-24)=0$$

ಅಥವಾ $x=3/2$ ಮತ್ತು $x=24$ ಎಂಬ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳ ಪೈಕಿ $x=24$ ಎಂಬುದು ಗ್ರಾಹ್ಯವಾದ ಉತ್ತರ.

5.2.3 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ .... (1)

α ಮತ್ತು β ಎಂಬ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ.

ಈಗ, $f(\alpha,\beta)$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು, α ಮತ್ತು β ಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ, ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗದಿದ್ದರೆ ಅಂದರೆ, $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$ ಆಗಿದ್ದರೆ $f(\alpha,\beta)$ವನ್ನು α ಮತ್ತು βಗಳ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2$

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು a ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad .... (2)$$

ಈಗ, α ಮತ್ತು β ಗಳು (2)ರ ಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $(x-\alpha)$ ಮತ್ತು $(x-\beta)$ ಎಂಬುದು (2)ರ ಎಡಭಾಗದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x^2-(\alpha-\beta)x+\alpha\beta=0 \qquad .... (3)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈಗ, (2) ಮತ್ತು (3) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ಅನುರೂಪ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಾನಗೊಳಿಸಿದರೆ

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ಮತ್ತು $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

$x^2-px+q=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು βಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\alpha^3+\beta^3$

(iii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}$ (iv) $\dfrac{1}{\alpha+2\beta}+\dfrac{1}{\beta+3\alpha}$

ದತ್ತ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದ α ಮತ್ತು β ಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು $\alpha+\beta=p$ ಮತ್ತು $\alpha\beta=q$ ಆಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

(i) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2q$

(ii) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^2-3pq$

(iii) $$\frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2(\alpha\beta)^2}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{\left(p^2-2q\right)^2-2(q^2)}{q}$$

$$=\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q}$$

(ಫಲಿತಾಂಶ (i) ನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ)

(iv) $$\frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\beta+2\alpha}=\frac{3(\alpha+\beta)}{(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}$$

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶವು $3(\alpha+\beta)=3p$

ಮತ್ತು ಛೇದವು $(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)=5\alpha\beta+2\left(\alpha^2+\beta^2\right)$

$$=5q+2\left(p^2-2q\right)=2p^2+q$$

(ಇಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶ (i) ನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ)

$$\therefore \quad \frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\beta+2\alpha}=\frac{3p}{2p^2+q}.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. "ಎಲೈ ಕಾಂತೆ, ದುಂಬಿಗಳ ಒಂದು ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಭಾಗದ ವರ್ಗಮೂಲದಷ್ಟು ಮತ್ತು 8/9 ಭಾಗದಷ್ಟು ದುಂಬಿಗಳು ಮಾಲತೀ ಪುಷ್ಪಗಳತ್ತ ತೆರಳಿದವು. ಒಂದು ಗಂಡು ದುಂಬಿಯು ಕಮಲದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ಪರಿಮಳಕ್ಕೆ ಸೋತು ಸಿಕ್ಕಿಹಾಕಿಕೊಂಡಿತು. ಈ ದುಂಬಿಯ ಝೇಂಕಾರದ ಧ್ವನಿಗೆ ಹೊರಗಡೆ ಇದ್ದ ಜೊತೆಯ (ಹೆಣ್ಣು) ದುಂಬಿಯು ಪ್ರತಿಧ್ವನಿಸುತ್ತಿತ್ತು. ಎಲೈ ಬಾಲೆ, ದುಂಬಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳು."

ಅಲಿಕುಲ ದಲ ಮೂಲಂ ಮಾಲತೀಂ ಯಾತಮಷ್ಟೌ
ನಿಖಿಲ ನವಮಭಾಗಾಶ್ಚಾಲಿನೀ ಭೃಂಗಮೇಕಂ ।
ನಿಶಿ ಪರಿಮಲಲುಬ್ಧಂ ಪದ್ಮಮಧ್ಯೇ ನಿರುದ್ಧಂ
ಪ್ರತಿರಣತಿ ರಣಂತಂ ಬ್ರೂಹಿ ಕಾಂತೇಽಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಂ ॥

- ***ಲೀಲಾವತೀ,*** ಶ್ಲೋಕ 72)

2. "ವರ್ಷ ಋತುವಿನಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳ ಸಮೂಹದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಸ್ಪಷ್ಟ ಧ್ವನಿಯನ್ನು ಕೇಳಿ, ನವಿಲುಗಳ ಒಂದು ಸಮೂಹದ ಹದಿನಾರನೇ ಒಂದು ಭಾಗ ಮತ್ತು ಎಂಟನೇ ಒಂದು ಭಾಗಗಳಷ್ಟು ಮತ್ತು ಉಳಿದುದರ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗ ಹಾಗೂ ಅನಂತರ ಉಳಿದುದರ ಆರನೇ ಒಂದು ಭಾಗಗಳಷ್ಟು ನವಿಲುಗಳು ಆನಂದಾತಿರೇಕದಿಂದ ಪರ್ವತದ ಶಿಖರವೆಂಬ ವಿಶಾಲವಾದ ನಾಟ್ಯ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಕುಣಿಯಲಾರಂಭಿಸಿದವು. ಸಮೂಹದ ವರ್ಗಮೂಲದ ಐದರಷ್ಟು ನವಿಲುಗಳು ಬಕುಲವೃಕ್ಷಗಳ ಉತ್ಕೃಷ್ಟವಾದ ಕಾಡಿನಲ್ಲಿ ವಿಹರಿಸುತ್ತಿದ್ದವು. ಇನ್ನು ಉಳಿದ 5 ನವಿಲುಗಳು ಪುನ್ನಾಗವೃಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಕಾಣಲ್ಪಟ್ಟವು. ಎಲೈ ಗಣಿತಜ್ಞನೇ, ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ಆ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ನವಿಲುಗಳು ಇದ್ದವು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳು."

- ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯರ ***ಗಣಿತಸಾರ ಸಂಗ್ರಹ***

5.3.1. ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^2+1=0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $x^2=-1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ x ನ ಬೆಲೆ ಏನು ? ಈ ಬೆಲೆಯು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೋ ಇಲ್ಲವೇ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ x^2 ಎಂಬುದರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು

ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ $x=\pm\sqrt{-1}$ ಎಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ, ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ -1 ನ ವರ್ಗಮೂಲವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ನಮ್ಮ ಕರ್ನಾಟಕದವನೇ ಆದ ಖ್ಯಾತ ಜೈನ ಗಣಿತಜ್ಞ **ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯನು** (ಕ್ರಿ.ಶ. 9 ನೇ ಶತಮಾನ) ತನ್ನ ***ಗಣಿತಸಾರ ಸಂಗ್ರಹ*** ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅದನ್ನು ಊಹ್ಯಾತ್ಮಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು i ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ $x=\pm i$ ಅಂದರೆ, $x^2+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳೆರಡೂ ಊಹ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದು ಅವುಗಳು $+i$ ಮತ್ತು $-i$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ a ಮತ್ತು b ಎಂಬುವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಆಗ, $(a+ib)$ ಎಂಬ ಸಂಯೋಜನೆಯನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸಹುದು.

a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಜೋಡಿ (a,b) ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು (ಅದನ್ನು C ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ) ಸಮಾನತೆ, ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ

(*i*) $(a,b)=(c,d)$, iff $a=c, b=d$;

(ಇಲ್ಲಿ iff ಎಂದರೆ "ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಾಗಿದ್ದರೆ")

(ii) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

(iii) $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

ಎಂಬ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ಒಳಪಟ್ಟಿದೆ. ಈ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು :

(i) $(a+ib)=(c+id)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ $a=c, b=d$;

(ii) $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$;

(iii) $(a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

ಇನ್ನು, ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಭಾಗಿಸಬಹುದು :

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

ಇದನ್ನು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಜೋಡಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ

$$(a,b)+(c,d)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+a^2}\right)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

5.3.2 ಸಹವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$z=(a+ib)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಊಹ್ಯ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಆಗ, $(a-ib)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ನೆಯನ್ನು $(a+ib)$ ಎಂಬುದರ ಸಹವರ್ತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು $\overline{z}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಒಂದು ಅಂಶವೆಂದರೆ, $z=(a+ib)$ ಮತ್ತು $\overline{z}=(a-ib)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹವರ್ತಿಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) $3+2i$ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಹವರ್ತಿ $3-2i$

(ii) $-5+4i$ ಮತ್ತು $-5-4i$ ಸಹವರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಸಹವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಗಳು

(i) ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ z ನ ಸಹವರ್ತಿಯ ಸಹವರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ z ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಸಹವರ್ತಿಯು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಹವರ್ತಿಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

(iii) (a) ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಸಹವರ್ತಿಯು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಹವರ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

(b) ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಸಹವರ್ತಿಯು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಹವರ್ತಿಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ :

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

(iv) ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸಹವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$z = a + ib$ ಮತ್ತು $\bar{z} = a - ib$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$$

ಎಂಬ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

(v) ಎರಡು ಪರಸ್ಪರ ಸಹವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$z = a + ib$ ಮತ್ತು $\bar{z} = a - ib$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$z.\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

ಎಂಬ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ :

1. $z = (a + ib)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ಎಂಬ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಪರಿಮಾಣ (ಮಾಡ್ಯುಲಸ್) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ, ಹಾಗೂ $|z|$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ $z = (a \pm ib)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

2. $(a + ib)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ***ಗುಣನಾತ್ಮಕ ವಿಲೋಮ*** ಅಂದರೆ $(a + ib)^{-1}$:

$$(a + ib)^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$ ಅಥವಾ

$$(a+ib)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2} \text{ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(2+3i)$ ಎಂಬುದರ ವಿಲೋಮ

$$\frac{1}{2+3i}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5.3.3 ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ ಮತ್ತು ಚತುರ್ಮೂಲ

(1) ಐಕ್ಯಧಾತುವಾಗಿರುವ 1ರ ವರ್ಗಮೂಲವು x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $x=1^{1/2}$ ಇದನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ $x^2=1$ ಅಥವಾ $x^2-1=0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $(x+1)(x-1)=0$ ಅಥವಾ $x=-1, x=1$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಐಕ್ಯಧಾತು 1ರ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು 1 ಮತ್ತು -1 ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ಘನಮೂಲ x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$x=1^{1/3}$ ಅಥವಾ $x^3=1$ ಅಥವಾ $x^3-1=0$

ಅಥವಾ $(x-1)(x^2+x+1)=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad x-1=0$ ಮತ್ತು $x^2+x+1=0$

ಅಥವಾ $x=1$ ಮತ್ತು $x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

ಎಂಬ ಘನಮೂಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 1 ನೈಜವಾದ ಘನಮೂಲವು ಹಾಗೂ

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)/2 \text{ ಮತ್ತು } \left(-1-i\sqrt{3}\right)/2$$

ಎಂಬುವು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಸಹವರ್ತಿ ಘನಮೂಲಗಳು ಆಗಿವೆ.

ಈಗ $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಐಕ್ಯಧಾತುವಾದ 1ರ ಘನಮೂಲಗಳು $1, \omega, \omega^2$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಘನಮೂಲವಾದ ω ಎಂಬುದು

$x^2+x+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುವುದರಿಂದ

$$\omega^2+\omega+1=0 \text{ ಮತ್ತು } \omega.\omega^2=\omega^3=1$$

ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ 1ರ ಘನಮೂಲಗಳ ಮುಖ್ಯವಾದ ಗುಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

(3) ಐಕ್ಯಧಾತುವಾಗಿರುವ 1ರ ಚತುರ್ಮೂಲವು x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$x=1^{1/4}$ ಅಥವಾ $x^4=1$ ಅಥವಾ $x^4-1=0$

ಅಥವಾ $(x^2-1)(x^2+1)=0$

ಅಂದರೆ, $x^2-1=0$, $x^2+1=0$ ಎಂದು ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, x^2-1, x^2-1 ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ, ಅವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲ ಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ

$x=\pm 1$ ಮತ್ತು $x=\pm i$ ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಚತುರ್ಮೂಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ಚತುರ್ಮೂಲಗಳು $-1, 1, i$ ಮತ್ತು $-i$ ಆಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : ω ಎಂಬುದು ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ಒಂದು ಘನಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ

$$(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಆ ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $1+\omega+\omega^2=0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $1+\omega-\omega^2=-\omega^2-\omega^2=-2\omega^2$

ಮತ್ತು $1-\omega+\omega^2=-\omega-\omega=-2\omega$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3$

$= \left(-2\omega^2\right)^3-(-2\omega)^3$

$= -8\omega^6-\left(-8\omega^3\right)=-8+8=0$ (ಕಾರಣ, $\omega^6=\left(\omega^3\right)^2=1$.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ :

   (a) $(2+3i)-(4-5i)+(1+6i)$

   (b) $\left(\sqrt{5}i+2\right)-\left(3\sqrt{5}i-2\right)$

   (c) $\left(2i+3\right)\left(\sqrt{2}i-1\right)$

   (d) $(i+3)/2i$

   (e) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$

2. $a+ib$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿ :

   (a) $\dfrac{3+5i}{2-3i}$

   (b) $\dfrac{1+i}{1-i}$

   (c) $\dfrac{(1+i)^2}{3-i}$

   (d) $\dfrac{(2+3i)^2}{2-3i}-\dfrac{(2-3i)^2}{2+3i}$

   (e) $\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$

3. $1, \omega, \omega^2$ ಎಂಬುವು ಐಕ್ಯಧಾತುವಿನ ಮೂರು ಘನಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

   (a) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$

   (b) $(1+\omega^2)^4=\omega$

   (c) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$

5.4.1 ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳು

(a) ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ಚರ್ಚಿಸಿದಂತೆ

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{....(1)}$$

ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಮೂಲಗಳಾದ α,β ಹಾಗೂ ಸಹಾಂಕಗಳಾದ a, b, c ಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧಗಳು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತಿವೆ:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a} \qquad \text{....(2)}$$

(b) ಹಾಗೆಯೇ, ಒಂದು ಘನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

$$ax^3+bx^3+cx+d=0 \qquad \text{....(3)}$$

ಇಲ್ಲಿ $a \neq 0$. ಸಮೀಕರಣ (3)ರ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $(x-\alpha),(x-\beta),(x-\gamma)$ ಎಂಬುವು (3)ರ ಎಡಭಾಗದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=ax^3+bx^2+cx+d$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ $a(\neq 0)$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಹಾಗೂ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

$$= x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ

(i) $\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}$ ಅಥವಾ $\sum\alpha=\frac{-b}{a}$;

(ii) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$ ಅಥವಾ $\sum\alpha\beta=\frac{c}{a}$; ಮತ್ತು

(iii) $\alpha\beta\gamma=\frac{d}{a}$

(c) ಈಗ ಒಂದು ದ್ವಿವರ್ಗ (ಅಥವಾ ಚತುಷ್ಪ್ರಮಾಣದ) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

$$\alpha x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad \text{..... (4)}$$

ಇಲ್ಲಿ $a \neq 0$. ಸಮೀಕರಣ (4)ರ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $(x-\alpha), (x-\beta), (x-\gamma), (x-\delta)$ ಎಂಬುವು (4)ರ ಎಡಭಾಗದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = a\left[x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}\right]$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನೂ $a(\neq 0)$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಮತ್ತು ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಬಹುಘಾತಪದಿಯಂತೆ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$x^4 - (\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\alpha\gamma+\beta\delta)x^2$$

$$-(\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta)\,x + \alpha\beta\gamma\delta$$

$$= x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಸಮಘಾತಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ

(i) $\sum \alpha = \alpha+\beta+\gamma+\delta = \dfrac{-b}{a}$

(ii) $\sum \alpha\beta = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha+\alpha\gamma+\beta\delta = \dfrac{c}{a}$

(iii) $\sum \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta = \dfrac{-d}{a}$

(iv) $\alpha\beta\gamma\delta = \dfrac{e}{a}$

ಎಂಬುದಾಗಿ ಮೂಲಗಳ ಮತ್ತು ಸಹಾಂಕಗಳ ನಡುವಣ ಸಂಬಂಧಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಮೇಲಿನ ಈ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಇತರ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟ ವಿಶೇಷ ಅಂಶಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ವರ್ಗ, ಘನ ಮತ್ತು ದ್ವಿವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು *A.P.* ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $(\alpha - \delta), \alpha$ ಮತ್ತು $(\alpha + \delta)$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(\alpha - \delta) + \alpha + (\alpha + \delta) = \frac{-(-24)}{4} = 6$$

ಅಂದರೆ, $3\alpha = 6$ ಅಥವಾ $\alpha = 2$.

ಹಾಗೆಯೇ, ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(\alpha - \delta)\alpha(\alpha + \delta) = \alpha(\alpha^2 - \delta^2) = \frac{-(18)}{4} = -\frac{9}{2}$$

ಅಂದರೆ, $\alpha(\alpha^2 - \delta^2) = -\frac{9}{2}$

ಈಗ, $\alpha = 2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $2(2^2 - \delta^2) = -\frac{9}{2}$

ಅಥವಾ $2(4 - \delta^2) = -\frac{9}{2}$ ಅಥವಾ $16 - 4\delta^2 = -9$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\delta^2 = \frac{16+9}{4} = \frac{25}{4}$ ಅಥವಾ $\delta = \pm\frac{5}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $\delta = \frac{5}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಮೂಲಗಳು

$\alpha - \delta = 2 - \frac{5}{2}$, $\alpha = 2$ ಮತ್ತು $\alpha + \delta = 2 + \frac{5}{2}$

ಅಂದರೆ, $-1/2, 2$ ಮತ್ತು $9/2$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

($\delta = -5/2$ ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡಾಗಲೂ ಅವೇ ಮೂಲಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ.)

2. $x^3+x^2-17x+15=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಅಂತರ 2 ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \alpha+2, \gamma$ ಆಗಿರಲಿ

ಆಗ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ : $\alpha+(\alpha+2)+\gamma=-1$

ಅಥವಾ $2\alpha+\gamma=-3$ ಅಥವಾ $\gamma=-(2\alpha+3)$ .... (1)

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂತೆಯೇ ಎರಡೆರಡು ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$\alpha(\alpha+2)+(\alpha+2)\gamma+\gamma\alpha=-17$$

ಅಥವಾ $\alpha(\alpha+2)+\gamma(2\alpha+2)=-17$ .... (2)

ಫಲಿತಾಂಶ (2) ರಲ್ಲಿ (1)ನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ

$$\alpha(\alpha+2)-(2\alpha+3)(2\alpha+2)=-17$$

ಅಂದರೆ, $-3\alpha^2-8\alpha-6=-17$

ಅಥವಾ $3\alpha^2+8\alpha-11=0$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$3\alpha^2+11\alpha-3\alpha-11=0 \text{ ಅಥವಾ } \alpha(3\alpha+11)-1(3\alpha+11)=0$$

ಅಂದರೆ, $(3\alpha+11)(\alpha-1)=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\alpha=1, \alpha=-11/3$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ, $\alpha=1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಫಲಿತಾಂಶ (1) ರಿಂದ $\gamma=-5$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$\alpha(\alpha+2)\gamma=-15 \qquad .... (3)$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಬೆಲೆಗಳಾದ $\alpha=1, \gamma=-5$ ಎಂಬುವು (3)ನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \alpha+2, \gamma$ ಅಂದರೆ, $1, 3, -5$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಬೆಲೆಯಾದ $\alpha=-11/3$ ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ (1)ರಿಂದ $\gamma=-[2.(-11/3)+3]=13/3$ ಆದರೆ, ಈ ಬೆಲೆಗಳು (3) ನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ.

3. $27x^3 - 21x^2 - 7x + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ $(G.P)$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ ಎಂದಿರಲಿ. ಇವುಗಳು $(G.P)$ ಯಲ್ಲಿದ್ದು ಅದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ r ಆಗಿದೆ. ಆಗ ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ :

$\frac{\alpha}{r}.\,\alpha.\,\alpha r = -1/27$ ಅಥವಾ $\alpha^3 = -1/27$ ಅಥವಾ $\alpha = -1/3$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$\frac{\alpha}{r} + \alpha + \alpha r = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

ಅಥವಾ $\alpha\left[1 + r + r^2\right] = \frac{7r}{9}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ, $\alpha = -\frac{1}{3}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಾಗ

$$-\frac{9}{3}\left[1 + r + r^2\right] = 7r$$

ಅಥವಾ $3r^2 + 10r + 3 = 0$ ಅಥವಾ $(3r + 1)(r + 3) = 0$

ಅಂದರೆ, $r = -3, r = -1/3$

ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಈಗ, $\alpha = 1/3$ ಮತ್ತು $r = -3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೂಲಗಳು $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ ಅಂದರೆ $1/9, -1/3$ ಮತ್ತು 1 ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಸೂಚನೆ : ಈಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $\alpha = 1/3$ ಆಗಿದ್ದು, $r = -1/3$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ ಮೂಲಗಳು $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ ಅಂದರೆ

$$\frac{(-1/3)}{(-1/3)}, \frac{-1}{3}, \left(\frac{-1}{3}\right) \times \left(\frac{-1}{3}\right)$$

ಅಥವಾ 1, −1/3, 1/9 ಎಂದು ಹಿಂದಿನ ಮೂಲಗಳೇ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

4. $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ $(H.P)$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಮೂಲಗಳು $H.P$ ಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $A.P$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{\gamma}$$

ಅಥವಾ $2\alpha\gamma = \alpha\beta + \beta\gamma$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಹಾಗೂ ಸಹಾಂಕಗಳ ಗುಣದಿಂದಾಗಿ

$$\sum \alpha\beta = (\alpha\beta + \beta\gamma) + \gamma\alpha = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

ಅಥವಾ $(2\alpha\gamma) + \gamma\alpha = -\frac{1}{2}$

ಅಂದರೆ, $3\alpha\gamma = -\frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $\alpha\gamma = -\frac{1}{6}$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $\alpha\gamma = -\frac{1}{6}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$\beta\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$ ಅಥವಾ $\beta = 2$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{11}{6}$

ಅಥವಾ $\alpha+\gamma=\frac{11}{6}-2=-\frac{1}{6}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಹಿಂದೆಯೇ, $\alpha\gamma=-\frac{1}{6}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $\alpha=-\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\gamma=\frac{1}{3}$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೂಲಗಳಾದ α,β,γ ಎಂಬುವುದರ ಬೆಲೆಗಳು $-1/2, 2, 1/3$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

5. $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $A.P$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$$a-3d, a-d, a+d, a+3d$$

ಆಗಿರಲಿ. (ಇಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $2d$) ಆಗ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=-2$$

ಅಥವಾ $4a=-2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $a=-1/2$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(a-3d)(a-d)(a+d)(a+3d)=40$$

ಅಥವಾ $(a^2-9a^2)(a^2-d^2)=40$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $a=-1/2$ ಎಂದು ಬಳಸಿದರೆ

$$\left(\frac{1}{4}-9d^2\right)\left(\frac{1}{4}-d^2\right)=40$$ ಅಥವಾ $(1-36d^2)(1-4d^2)=640$

ಅಥವಾ $144d^4-104d^2+1=640$ ಅಥವಾ $144d^4-40d^2-639=0$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $d^2=\frac{9}{4}$ ಅಥವಾ $d=\pm\frac{3}{2}$ ಎಂದು

ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈಗಾಗಲೇ $a=-1/2$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿರುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು $d=3/2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಮೂಲಗಳು

$$a-3d, a-d, a+d, a+3d$$

ಅಂದರೆ, –5, –2, 1 ಮತ್ತು 4 ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

(***ಸೂಚನೆ :*** $d=-3/2$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಈ ಮೇಲಿನ ಮೂಲಗಳೇ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.)

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. *ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳು A.P.ಯಲ್ಲಿವೆ. ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :*

(a) $32x^3-48x^2+22x-3=0$

(b) $4x^3-24x^2+23x+18=0$

(c) $x^3-9x^2+23x-15=0$

(d) $x^3-6x^2+11x-6=0$

(e) $x^4-2x^3-21x^2+22x+40=0$

2. *ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳು G.P.ಯಲ್ಲಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :*

(a) $3x^3-26x^2+52x-24=0$

(b) $54x^3-39x^2-26x+16=0$

(c) $27x^3+42x^2-28x-8=0$

(d) $8x^3-14x^2+7x-1=0$

(e) $27x^4-195x^3+494x^2-520x+192=0$

(***ಸೂಚನೆ :*** ಮೂಲಗಳನ್ನು $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)

3. *ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ (H.P)ಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.*

(a) $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$

(b) $10x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = 0$

(c) $45x^3 - 59x^2 + 15x - 1 = 0$

(d) $105x^3 - 142x^2 + 60x - 8 = 0$

4. $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ *ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಪೈಕಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತವು 0 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.*

5.4.2 ಸಂಯೋಜನ ಭಾಗಕ್ರಮ (ಸಿಂಥೆಟಿಕ್ ಡಿವಿಜನ್)

ಒಂದು n ದರ್ಜೆಯ ಬಹುಘಾತೀಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

$$p(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0 \quad .... (1)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಒಂದನೇ ದರ್ಜೆಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿ $(x - \alpha)$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು $(n-1)$ ದರ್ಜೆಯ ಒಂದು ಬಹುಘಾತೀಯ ಸಮೀಕರಣ $q(x)$ ಆಗಿದ್ದು, ಬರುವ ಶೇಷವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ R ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ,

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x) + R \quad ... (2)$$

ಇಲ್ಲಿ $(n-1)$ ದರ್ಜೆಯ ಬಹುಘಾತೀಯ $q(x)$ನ ಮಾದರಿ :

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + ... + b_{n-1}$$

ಬಹುಘಾತಪದೀ $p(x)$ ಅನ್ನು $(x - \alpha)$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$ನ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಶೇಷ Rಅನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ *"ಸಂಯೋಜನ ಭಾಗಕ್ರಮ"* ದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ α ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು *'ಗುಣಕ'* ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವಿಧಾನ : (i) ಬಹುಘಾತ ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಸಹಾಂಕಗಳಾದ $a_0, a_1, a_2 .... a_n$ ಇವುಗಳನ್ನು ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಘಾತವು ಇರದಿದ್ದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಇದರ ಸಹಾಂಕದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ (0)ಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಈ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಎಡತುದಿಯಲ್ಲಿ α ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಒಂದು ಮೂಲವು α ಆಗಿರುತ್ತದೆ, ಅಂದರೆ, $p(\alpha)=0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ.

(iii) ಮೇಲಿನ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ನಂತರ ಎರಡನೇ ಸಾಲನ್ನು ಖಾಲಿಯಾಗಿಟ್ಟು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಡದ ಮೊದಲಲ್ಲಿ a_0 ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು (ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಆದಿಯಲ್ಲಿರುವ a_0 ನ ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ) ಬರೆಯಿರಿ. ಇದನ್ನೇ b_0 ಅಂತ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ, $b_0 \equiv a_0$. ಈ b_0 ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವ α ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ $b_0\alpha$ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ a_1ನ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಈಗ $(b_0\alpha)$ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಮೇಲಿರುವ a_1 ಸ್ಥಿರಾಂಕಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸಿ ಬರುವ $(a_1+b_0\alpha)$ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಇದನ್ನು b_1 ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಅಂದರೆ, $b_1=(a_1+b_0\alpha)$

ಪುನಃ ಈ ಮೇಲೆ ಬಂದಿರುವ b_1 ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು α ದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ $b_1\alpha$ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ a_2 ಸ್ಥಿರಾಂಕದ ಕೆಳಗೆ ಬರೆಯಿರಿ. ಈಗ ಅವೆರಡನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಬರುವ $(a_2+b_1\alpha)$ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಅವೆರಡರ ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಪದವಾಗಿ)ಬರೆಯಿರಿ. ಅದನ್ನು b_2 ಎಂದು ಕರೆಯಿರಿ.

(iv) ಈ ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸಿ $b_3, b_4, \ldots\ldots$ ಮುಂತಾದ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ $b_n=a_n+(b_{n-1})\alpha$ ಎಂದು ಬರುವ ಸ್ಥಿರಾಂಕವೇ ಶೇಷ R ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

1ನೇ ಸಾಲು	α	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_n	
2ನೇ ಸಾಲು			$b_0\alpha$	$b_1\alpha$	$\ldots$	$b_{n-1}\alpha$	
3ನೇ ಸಾಲು		a_0	b_1	b_2	$\ldots$	b_{n-1}	R

(v) ಒಂದು ವೇಳೆ ಶೇಷ $R=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(x-\alpha)$ ಎಂಬುದು ಬಹುಘಾತಪದೀ $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ α ಎಂಬುದು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. x^3-3x^2+2x+5 ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x-1)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಬರುವ

ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಮೇಲಿ ಹೇಳಿದ ವಿಧಾನದಂತೆ ಬರೆದರೆ

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ & & +1 & -2 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \underline{|5} \end{array}$$

$\therefore$ ಭಾಗಲಬ್ಧ : x^2-2x , ಶೇಷ : 5

2. x^5-4x^3+2x+1 ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x+2)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಮತ್ತು ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಭಾಜಕ : $(x+2)=x-(-2)$

ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಕ (-2) . ಆದ್ದರಿಂದ ಸಂಯೋಜನ ಭಾಗಕ್ರಮದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಸಹಾಂಕಗಳು ಬರುತ್ತವೆ.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 0 & -4 & 0 & +2 & 1 \\ & & -2 & +4 & 0 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & 0 & +2 & \underline{|-3} \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗಲಬ್ಧ $\left(x^4-2x^3+2\right)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ -3.

3. $x^3+6x^2+9x+4=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ $x=-1$ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, (-1) ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $x+1$ ಎಂಬುದು ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದ ಅಪವರ್ತನ. ಈಗ ದತ್ತ ಮೂರನೇ ದರ್ಜೆಯ ಘಾತಪದೀಯುವನ್ನು $(x+1)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ (-1ನ್ನು ಗುಣಕವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು) ಹೀಗೆ ಬರುತ್ತದೆ :

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 9 & 4 \\ & & -1 & -5 & -4 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & \underline{|0} \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ x^2+5x+4 ಮತ್ತು ಶೇಷ 0.

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ $(x^2+5x+4)=0$ ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$x^2+5x+4=[x+1][x+4]=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x=-1$ ಮತ್ತು $x=-4$.

ಹೀಗೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂರು ಮೂಲಗಳು –1, 1 ಮತ್ತು –4

5.4.2 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೂಲಗಳ ಸಹವರ್ತಿತ್ವ

ಒಂದು ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಂಕಗಳು ನೈಜವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಇರಬಹುದಾದ ಊಹ್ಯ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೂಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಹವರ್ತಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂತೆಯೇ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಮೂಲಗಳೂ ಸಹವರ್ತಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಪ್ರಮೇಯಗಳಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 1 : $f(x)=a_0x+a_1x^{n-1}+........+a_n=0$

ಎಂಬ ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, ಸಹಾಂಕಗಳಾದ $a_0, a_1, ... a_n$ ಎಲ್ಲವೂ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು $(\alpha+i\beta)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅದರ ಸಹವರ್ತಿಯಾದ $(\alpha-i\beta)$ ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 : $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+......+a_n=0$

ಎಂಬ ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಸಹಾಂಕಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು $(\alpha+\sqrt{\beta})$ – ಇಲ್ಲಿ α, β ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $\sqrt{\beta}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ – ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(\alpha-\sqrt{\beta})$ ಕೂಡ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ : (i) ಪ್ರಮೇಯ (2) ರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ $f(x)=0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಸಹಾಂಕಗಳೆಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)$ – ಇಲ್ಲಿ α, β ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಹಾಗೂ $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$ ಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ – ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, $-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ ಮತ್ತು $-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ ಇವುಗಳೂ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ಪ್ರಮೇಯ (1)ರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ, ಬೆಸ ಪರಿಮಾಣದ ಬಹುಘಾತಪದಿ ಸಮೀಕರಣವು ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಂದಾದರೂ ನೈಜ ಮೂಲವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $2x^3-3x^2-18x+5=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ $2+\sqrt{3}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $(2+\sqrt{3})$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(2-\sqrt{3})$ ಕೂಡ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲವು γ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\gamma=-\frac{(-3)}{2}=\frac{3}{2}$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$4+\gamma=\frac{3}{2} \text{ ಅಥವಾ } \gamma=\frac{3}{2}-4=\frac{-5}{2}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು :

$$2+\sqrt{3},\, 2-\sqrt{3} \text{ ಮತ್ತು } \frac{-5}{2}$$

2. $(2+3i)$ ಎಂಬುದು $x^3-3x^2+9x+13=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

$(2+3i)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಸಹವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ $(2-3i)$ ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಮೂಲ. ಇನ್ನೊಂದು ಉಳಿದಿರುವ ಮೂಲವು γ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(2+3i)+(2-3i)+\gamma=-\frac{(-3)}{1}=3.$$

ಅಂದರೆ, $4+\gamma=3$ ಅಥವಾ $\gamma=-1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು : $2+3i,\, 2-3i$ ಮತ್ತು -1

3. $3x^5+2x^4-30x^3-20x^2+3x+2=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ಆಗಿದೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಸಹವರ್ತಿಗಳಾದ

$\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $(-\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ಮತ್ತು $(-\sqrt{2}-\sqrt{3})$ ಗಳೂ ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ಐದನೇ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಒಟ್ಟು 5 ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇನ್ನೂ ಉಳಿದ ಒಂದು ಮೂಲವು γ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{2}-\sqrt{3})+\gamma=\frac{-2}{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\gamma=\frac{-2}{3}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಸಮೀಕರಣದ 5 ಮೂಲಗಳು :

$(\sqrt{2}+\sqrt{3}),(\sqrt{2}-\sqrt{3}),(-\sqrt{2}+\sqrt{3}),(-\sqrt{2}-\sqrt{3})$ ಮತ್ತು $\frac{-2}{3}$.

4. $x^4+5x^3+13x^2+16x+10=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $(-1-i)$. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $(-1-i)$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $(-1+i)$ ಎಂಬ ಸಹವರ್ತಿಯೂ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$[x-(-1-i)][x-(-1+i)]=[(x+1)+i)][(x+1)-i]$$

$$=\left[(x+1)^2+1\right]$$

ಎಂಬುದು ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದ ಬಹುಘಾತಪದಿಯ ಅಪವರ್ತನ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಬಹುಘಾತಪದಿ $(x^4+5x^3+13x^2+16x+10)$ ಅನ್ನು $\left[(x+1)^2+1\right]$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ (x^2+3x+5) ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಅಪವರ್ತನವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $x^2+3x+5=0$ ಎಂಬ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2}=\frac{-3\pm i\sqrt{11}}{2}$$

ಎಂಬ ಮೂಲಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣದ 4 ಮೂಲಗಳು:

$$(-1-i),\ (-1+i),\ \frac{-3+i\sqrt{11}}{2},\ \frac{-3-i\sqrt{11}}{2}$$

(ಎರಡು ಜೊತೆ ಸಹವರ್ತಿ ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಮೂಲಗಳು).

ಅಭ್ಯಾಸ 5.4

1. $(5-\sqrt{2})$ ಎಂಬುದು $x^4-6x^3-16x^2+82x+23=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

2. $x^6+3x^5-x^4+6x^3-x^2+3x+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು $\sqrt{3}-2$ ಮತ್ತು i. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

3. $x^3-5x^2+9x-5=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $2+i$. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

4. $x^3-9x^2+25x-21=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $3+\sqrt{2}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

5. $(2-3i)$ ಎಂಬುದು $x^4-2x^3+2x^2+38x-39=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :

1. $x^3-4x^2+6x-4=0$

2. $x^4+x^3-9x^2+x+30=0$

3. $x^4-4x^3+8x+3=0$

ಅಧ್ಯಾಯ 6

ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ

ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಮೊದಲು ಅದಕ್ಕೆ ಬಳಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪ (*Permutations and Combinations*) ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಒಂದು ಸ್ಥೂಲವಾದ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

6.1.1 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ವಸ್ತುಗಳ ಗಣವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೋ ಹಾಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಜೋಡಣೆಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ : (1) *: a,b,* ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು *ab, ba.*

ಉದಾ : (2) *a,b,c* ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು *abc, acb, bca, bac, cab, cba.*

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಸ್ತುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಸ್ತುಗಳನ್ನೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿರದೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗಶಃ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ *a,b,c* ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು *ab, bc, ac, ba, cb, ca.*

ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮ

n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ಆರಿಸಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ^nP_r ಅಥವಾ nPr ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

6.1.2. n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

(ಅಂದರೆ ^nP_r ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ)

$^nP_r = n(n-1)(n-2)\,.........\,(n-r+1)$

ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಗುವುದು.

1	2	3		r
n	$n-1$	$n-2$		$n-(r-1)$

$a_1, a_2, a_3 .... a_n$ ಎಂಬ n ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ ಮತ್ತು r ಖಾಲಿ ಸ್ಥಾನಗಳಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಈ r ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು n ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿ ತುಂಬುತ್ತ ಬಂದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧವಾಗಿ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದೋ ಅದನ್ನು ^nP_r ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. 1ನೇ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳವನ್ನು ತುಂಬಲು n ವಿಧಗಳಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ n ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ತುಂಬಬಹುದು. 1ನೇ ಸ್ಥಳವನ್ನು ತುಂಬಿದ ಮೇಲೆ, 2ನೇ ಸ್ಥಾನವನ್ನು $(n-1)$ ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಆರಿಸಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಮೂಲಸೂತ್ರದಿಂದ ಮೊದಲ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು $n(n-1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು.

ಈಗ ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತುಂಬಲು $(n-2)$ ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ $(n-2)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತುಂಬಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರೆಸುತ್ತಾ r ನೆಯ ಸ್ಥಳವನ್ನು $n-(r-1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು. ಎಲ್ಲಾ r ಖಾಲಿ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು $n(n-1)(n-2)(n-3)...........(n-r+1)$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು.

$$\therefore {}^nP_r = n(n-1)(n-2)...............(n-r+1)$$

ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ :

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3).....(n-r+1)$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $r = n$ ಹಾಕಿದಾಗ

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)\ ....(n-n+1)$$

$$= n(n-1)(n-2)\ ....\ 1$$

1ರಿಂದ n ತನಕ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬರುವುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಇದನ್ನು $n!$ ಅಥವಾ $\underline{|n}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು **'n ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ'** ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

$\therefore\ n!=n(n-1)(n-2)..........4.3.2.1$

ಉದಾ : $4!=4.3.2.1=24$

$5!=5.4.3.2.1=120$

ಸೂಚನೆ : (i) ${}^nP_r$ ನ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ $n,(n-1)$, ... ಮುಂತಾದ r ಅಪವರ್ತನಗಳವೆ

(ii) ${}^nP_n = n\,!$

6.1.3. ${}^nP_r$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2)..............(n-r+1)$$

ಸೂತ್ರದ ಬಲಭಾಗವನ್ನು $(n-r)(n-r-1)..................1$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅದರಿಂದಲೇ

$${}^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...(n-r+1)(n-r)(n-r-1)...1}{(n-r)(n-r-1)..........1}$$

ಅಂಶದಲ್ಲಿ n ನಿಂದ 1ರ ತನಕ ಅಪವರ್ತನಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಛೇದದಲ್ಲಿ $(n-r)$ ನಿಂದ 1ರ ತನಕ ಅಪರ್ವತನಗಳಿವೆ.

$$\therefore\ {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ಸೊನ್ನೆಯ ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ 0! ಯ ಬೆಲೆ

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $r = n$ ಹಾಕಿದಾಗ

$${}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

ಆದರೆ, ${}^nP_n = n!$ $\quad \therefore\ 0! = \frac{n!}{n!} = 1$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ${}^{7}P_{6}, {}^{7}P_{4}, {}^{5}P_{4}, {}^{12}P_{3}$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಏನು ?

(i) $${}^{7}P_{6} = 7(7-1)(7-2).......(7-6+1)$$
$$= 7.6.5.4.3.2 = 5040$$

(ii) $${}^{9}P_{4} = 9(9-1)(9-2)(9-3)$$
$$= 9.8.7.6 = 3024$$

(iii) $${}^{5}P_{4} = 5.4.3.2 = 120$$

(iv) $${}^{12}P_{3} = 12.11.10 = 1320$$

2. ${}^{n}P_{n} = 720$ ಆದರೆ n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

${}^{n}P_{n} = n!$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಈಗ, $720 = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 6!$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $n! = 6!$ $\quad\therefore\quad n = 6$

3. ಪಾಶ, ಅಂಕುಶ, ಅಹಿ (ಸರ್ಪ), ಡಮರುಗ, ಕಪಾಲ (ರುಂಡ), ಶೂಲ, ಖಟ್ವಾಂಗ (ತುದಿಯಲ್ಲಿ ರುಂಡವನ್ನುಳ್ಳ ಶಿವನ ಒಂದು ದಂಡ), ಶಕ್ತಿ, ಶರ (ಬಾಣ), ಚಾಪ (ಬಿಲ್ಲು) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಕೈಯಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿರುವ ಹತ್ತು ಕೈಗಳುಳ್ಳ ಶುಂಭುವಿನ (ಬೇರೇ ಬೇರೆ) ಎಷ್ಟು ವಿಗ್ರಹಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು ?

ಇಲ್ಲಿ, ಶಿವನ ಆಯುಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = ಕೈಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 10

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧದ ವಿಗ್ರಹಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ${}^{10}P_{10} = 10\,!$

$= 36,28,800.$

4. ವಿಷ್ಣುವಿನ (ಹರಿಯ) ವಿಗ್ರಹಗಳನ್ನು ತಯಾರು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಗ್ರಹಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದರ ನಾಲ್ಕು ಕೈಗಳಲ್ಲಿ ಶಂಖ, ಚಕ್ರ, ಗದಾ, ಪದ್ಮ- ಈ ನಾಲ್ಕು ಆಯುಧಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಕೈಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿದರೆ, ವಿಷ್ಣುವಿನ ವಿಗ್ರಹಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬಗೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು ?

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯೂ ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಂತೆಯೇ. ಇಲ್ಲಿ, ಹರಿಯ ಆಯುಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = ಕೈಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿಗ್ರಹಗಳ ವಿಧಗಳು = ${}^{4}P_{4} = 4\,! = 24.$

ಸೂಚನೆ : *(i)* ಈ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಲೆಕ್ಕಗಳು ನಮ್ಮ ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತೀಯ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಾದ (ಎರಡನೇ) **ಭಾಸ್ಕರಚಾರ್ಯರ** (ಜನ್ಮ: ಕ್ರಿ.ಶ. 1114) ಜನಪ್ರಿಯವಾದ ***ಲೀಲಾವತೀ*** ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳುಳ್ಳ ಶ್ಲೋಕವು ಹೀಗಿದೆ :

ಪಾಶಾಂಕುಶಾಹಿ ಡಮರೂಕ ಕಪಾಲಶೂಲೈಃ
ಖಟ್ವಾಂಗ ಶಕ್ತಿ ಶರ ಚಾಪಯುತೈರ್ಭವಂತಿ ।
ಅನ್ಯೋನ್ಯ ಹಸ್ತಕಲಿತೈಃ ಕತಿ ಮೂರ್ತಿಭೇದಾಃ
ಶಂಭೋರ್ಹರೇರಿವ ಗದಾರಿಸರೋಜಶಂಖೈಃ ॥

ಲೀಲಾವತೀ, ಶ್ಲೋಕ 269.

(*ii*) ಬೇಲೂರಿನ ಚೆನ್ನಕೇಶವ ದೇವಾಲಯದ ಹೊರಗಿನ ನೈಋತ್ಯದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಕೈಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಚಿಕ್ಕದೊಂದು ಶಂಭುವಿಗ್ರಹವಿದೆ. ಶಂಭುವಿನ ಅಂತಹ ಒಂದು ವಿಗ್ರಹವು ಬೇರೆ ಎಲ್ಲೂ ಇದ್ದ ಹಾಗಿಲ್ಲ. ಆ ದೇವಾಲಯವು ಕ್ರಿ.ಶ. 1117ರಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟಲಾಯಿತೆಂದು ಅಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಶಾಸನದಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರು ಅದಕ್ಕಿಂತ 3 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಜನಿಸಿದ್ದರಿಂದ ಬೇಲೂರಿನ ಈ ಶಂಭು ವಿಗ್ರಹವನ್ನು ನೋಡಿಯೇ ಮುಂದೇ ಸುಮಾರು 1150 ರಲ್ಲಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ***'ಲೀಲಾವತಿ'*** ಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರಬೇಕು.

6.2.1 ವಿಕಲ್ಪಗಳು

ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಗಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಆ ವಸ್ತುಗಳ ಸ್ಥಾನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನೂ ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಥಾನಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಗಮನವೀಯದೆ ಕೇವಲ ವಸ್ತುಗಳ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : ಒಂದು ಅಲಮಾರಿನಲ್ಲಿರುವ 12 ವಿವಿಧ ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ 5 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಲ್ಲಿ ಅದು ವಿಕಲ್ಪಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಯೂ ಮತ್ತು ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಅದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗೂ ಆಗುವುದು.

12 ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲಿ 5 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ಎನ್ನುವುದನ್ನು $^{12}C_5$ ಅಥವಾ $_{12}C_5$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

n ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದರೆ ಬರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ^nC_r ಅಥವಾ $_nC_r$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

6.2.2 $_nC_n$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರ

n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ^nC_r ಇರಲಿ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಕಲ್ಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧದ r ವಸ್ತುಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು $r\,!$ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ವಿಕಲ್ಪಗಳು $^nC_r \times r\,!$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$^{n}C_r \times r! = {}^{n}P_r$$

$$\therefore {}^{n}C_r = \frac{{}^{n}P_r}{r!} \quad = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}$$

$$\therefore \quad {}^{n}C_r = \frac{n(n-1)(n-2).......(n-r+1)}{1.2.3..........r} \qquad ...\ (1)$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸೂತ್ರದ ಈ ರೂಪವು (1) ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಸುಲಭ ಎಂದು ತೋರುವುದು.

ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ r ಅಪವರ್ತಗಳು ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (1)ನೆಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು *ಶ್ರೇಣಿಗುಣಲಬ್ಧದ* ರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸೂತ್ರದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡನ್ನು $(n-r)!$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$^{n}C_r = \frac{n(n-1)(n-2).......(n-r+1)(n-r)!}{1.2.3..........r!(n-r)!} \qquad ....\ (2)$$

ಅಥವಾ $^{n}C_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ r ನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ $n-r$ ಹಾಕಿದರೆ

$$^{n}C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^{n}C_r$$

ಅಂದರೆ, $^{n}C_{n-r} = {}^{n}C_r$

ಆದ್ದರಿಂದ n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $(n-r)$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : ಇದರಿಂದ $^{n}C_r$ ಯಾವಾಗಲೂ ದತ್ತ n ವಸ್ತುಗಳನ್ನು r ವಸ್ತುಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಗುಂಪಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $(n-r)$ ವಸ್ತುಗಳುಳ್ಳ ಇನ್ನೊಂದು ಗುಂಪಾಗಿಯೂ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ***ಪೂರಕ ಗುಂಪುಗಳು*** ಎನ್ನಬಹುದು.

6.2.3 ^nC_n ಮತ್ತು $^nC_0$ ಬೆಲೆಗಳು

ಸೂತ್ರ (3) ಎಂದರೆ

$$^nC_{n-r} = {}^nC_r$$

ಎಂಬುದರಿಂದ ^nC_n ಮತ್ತು $^nC_0$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $r = 0$ ಹಾಕಿದಾಗ

$$^nC_n = {}^nC_0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ n ವಸ್ತುಗಳನ್ನೂ (ಎಲ್ಲವನ್ನೂ) ಕೇವಲ 1 ವಿಧದ ಆರಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \qquad \mathbf{{}^nC_n = 1 = {}^nC_0}$$

ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ :

(i) $$^nP_r = n(n-1)(n-2).......(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(ii) $$^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2).......(n-r+1)}{1.2.3........r}$$

(iii) $$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(iv) $$^nC_{n-r} = {}^nC_r$$

6.2.4 ಪ್ರಮೇಯ :

$$^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$$

ಸಾಧನೆ : ಫಲಿತಾಂಶದ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$^nC_r + {}^nC_{r-1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{1.2.3......r} + \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+2)}{1.2.3......(r-1)}$$

$$= \frac{n(n-1)\ ......\ (n-r+2)}{1.2.3......\ (r-1)}\left[\frac{n-r+1}{r}+1\right]$$

$$= \frac{n(n-1)\ ......(n-r+2)}{1.2.3......(r-1)}\times\left[\frac{n+1}{r}\right]$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ ......(n-r+2)}{1.2.3....(r-1)(r)}$$

$= {}^{n+1}C_r$, ಫಲಿತಾಂಶದ ಬಲಭಾಗ.

ಗಮನಿಸಿ : ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗೆ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ "ಪ್ರಸ್ತರಣ" ಎಂಬ ಶಬ್ದವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಸ್ತರಣ ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಗೆ ಪ್ರಾಚೀನ ಜೈನರು ಬಹಳ ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಲಾದ

$${}^{n}C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ ......(n-r+1)}{1.2.3...r}$$

ಎಂಬ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲೇ ಮೊಟ್ಟ ಮೊದಲಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿರುವ ಕೀರ್ತಿ ನಮ್ಮ ಕರ್ನಾಟಕದವನೇ ಆದ ಖ್ಯಾತ ಜೈನ ಗಣಿತಜ್ಞ **ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ**ನಿಗೆ (ಕ್ರಿ.ಶ. 9ನೇ ಶತಮಾನ) ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಆತ ಗುಲ್ಬರ್ಗ ಜಿಲ್ಲೆಯ ಮಳಖೇಡ (ಅಥವಾ ಮಾನ್ಯಖೇಟ) ಎಂಬಲ್ಲಿ ಅಮೋಘ ವರ್ಷ ನೃಪತುಂಗನ ರಾಜಾಶ್ರಯದಲ್ಲಿದ್ದು, **ಗಣಿತಸಾರ ಸಂಗ್ರಹ** ಎಂಬ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬೆಳಗಿಸಿದ್ದಾನೆ.

6.3.1 ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ

ಯಾವುದೇ ಸಾಂತ (ಪರಿಮಿತ) ಸಂಖ್ಯೆ ಬೀಜಾಕ್ಷರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದುಂಟಾದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು 'ಪದ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, x^2, $3x^3y$, $-6x^2yz$ ಮುಂತಾದವು. ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಂಕಲನ ಪರಿಕರ್ಮದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಅಥವಾ **ದ್ವಿಪದಿ**ಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಪದಗಳಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಪದಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಕಲನ ಪರಿಕರ್ಮದಿಂದ ಹುಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳುವ ಉಕ್ತಿಗಳು **ಬಹುಪದಿ**ಗಳು.

ಉದಾ: (ದ್ವಿಪದಿಗಳು) (1) $x + y$ (2) $x^2y+\frac{1}{2^y}$

(3) $xy^2 - 6xy$ (4) $x + x^{-2}y$

(ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಪರಿಕರ್ಮವೆಂದಾಗ ವ್ಯವಕಲನವೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ ; ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರವು ಭಾಗಕಾರವನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ).

ಉದಾ: (ಬಹುಪದಿಗಳು) (1) $x^2 y-6xy+\frac{7x^2}{y}$

(2) $x+y+7z-8x^2$

x ಮತ್ತು y ಗಳು ಎರಡು ಪದಗಳಾದರೆ $x+y$ ಒಂದು ದ್ವಿಪದಿ.

ಈ ದ್ವಿಪದಿಯ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಗಳನ್ನು ನಾವು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗಾಗಲೇ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ

(1) $x+y=(x+y)^1=x^1+y^1$

(2) $(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x(x+y)+y(x+y)$

$$=x^2+2xy+y^2={}^2C_0\,x^2+{}^2C_1\,xy+{}^2C_2\,y^2$$

(3) $(x+y)^3=(x+y)(x+y)^2=(x+y)(x^2+2xy+y^2)$

$$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$={}^3C_0\,x^3+{}^3C_1\,x^2y+{}^3C_2\,xy^2+{}^3C_3\,y^3$$

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವ್ಯವಧಾನದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ

$$(x+y)^n={}^nC_0\,x^n+{}^nC_1\,x^{n-1}y^n\,C_2\,x^{n-2}\,y^2+\ldots$$

$$+{}^nC_r\,x^{n-r}\,y^r+\ldots+{}^nC_n\,y^n$$

$$=x^n+{}^nC_1\,x^{n-1}y+{}^nC_2\,x^{n-2}\,y^2+\ldots+y^n\,\ldots\ldots..(*)$$

ಆಗಿರಬಹುದೆಂದು ಅನುಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಫಲಿತಂಶ (*) ಎಂಬುದು ದ್ವಿಪದಿ $(x+y)$ ನ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತ n ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಂದು ಸಮಾನೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ಸಮಾನೋಕ್ತಿಯನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಮಾನೋಕ್ತಿಯು ಅನುಮಾನದಿಂದ ಬರೆದಂತಹುದು. ಅದು ಯಾವಾಗ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉದ್ದೇಶ.

6.3.2 ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತಪ್ರಮೇಯ

n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗಲೆಲ್ಲಾ

$$(x+y)^n = x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 \ldots + {}^nC_rx^{n-r}y^r + \ldots + y^n$$

ಸಾಧನೆ : ಮೇಲಿನ ಸಮಾನೋಕ್ತಿಯು ಯಾವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿರುವುದೋ ಅಂತಹ ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವನ್ನು S ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. N ಎಲ್ಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವಾದರೆ, ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ನಾವು $S = N$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು ನಾವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ('ಉದ್ಗಮನ ನಿಯಮ' ಅಥವಾ) ಗಣಿತಾನುಮಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$1 \in S$ ಮತ್ತು $n \in S$ ಆದರೆ $n+1 \in S$ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆಗ ಅಧ್ಯಾಯ 3ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿರುವ ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ಪ್ರಕಾರ $S = N$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $P(1)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಮೊದಲು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಮತ್ತು $P(n)$ ಒಂದು ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾದರೆ $P(n+1)$ ಕೂಡ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, $(x+y)^1 = x+y = x^1 + y^1 = {}^1C_0x^1 + {}^1C_1y^1$

ಆದ್ದರಿಂದ $P(1)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ $P(n)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ

ಅಂದರೆ, $(x+y)^n = x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + \ldots\ldots + {}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r \ldots + y^n$

ಆದ್ದರಿಂದ $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$

$$= (x+y)(x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots + {}^nC_rx^{n-r}y^r + \ldots + y^n$$

$$= x(x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots + {}^nC_rx^{n-r}y^r + .. + y^n$$

$$+ y(x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^{n-r}y^r + \ldots + y^n)$$

$$= x^{n+1} + ({}^nC_1 + {}^nC_0)x^ny + ({}^nC_2 + {}^nC_1)x^{n-1}y^2 + \ldots$$

$$+ ({}^nC_r + {}^nC_{r-1})x^{n+1-r}y^r + \ldots + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + {}^{n+1}C_1\, x^ny + {}^{n+1}C_2x^{n-1}y^2 + \ldots + y^{n+1}$$

$$\left[\because {}^{n+1}C_r = {}^nC_r + {}^nC_{r-1}\right]$$

ಹಾಗಾಗಿ, $P(n+1)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗಲೆಲ್ಲ $P(n)$ ಸತ್ಯೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

6.3.3 ದ್ವಿಪದೀಯ ಸಹಾಂಕಗಳ ಗುಣಗಳು

ದ್ವಿಪದೀಯ ಘಾತ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೆಲವು ಸಮತೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_rx^r + \ldots\ldots x^n$$

$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_rx^r + \ldots\ldots {}^nC_nx^n \quad \ldots(1)$$

ಫಲಿತಾಂಶ (1) ರಲ್ಲಿ x ಬದಲಿಗೆ $(-x)$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots + (-1)^r\ {}^nC_rx^r + \ldots\ldots + {}^nC_nx^n \quad \ldots(2)$$

ಈಗ (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ $x = 1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 \ldots\ldots + {}^nC_r + \ldots\ldots + {}^nC_n = 2^n \quad \ldots(3)$$

ಮತ್ತು

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 \ldots\ldots + (-1)^r\ {}^nC_r + \ldots\ldots + (-1)^n\ {}^nC_n = 0 \quad \ldots(4)$$

ಎಂಬ ಎರಡು ಮುಖ್ಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾದ

$${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots\ldots, {}^nC_r, \ldots\ldots {}^nC_n$$

ಇವುಗಳನ್ನು ದ್ವಿಪದಿ ಘಾತದ (ಅಥವಾ ದ್ವಿಪದೀಯ) ಸಹಾಂಕಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತ n ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಈ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು

$C_0, C_1, C_2, \ldots\ldots C_r, \ldots\ldots, C_n$ ಎಂದು ಬರೆಯುವ ವಾಡಿಕೆ ಇದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ

$$C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots C_n = 2^n$$

ಮತ್ತು $C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 \ldots\ldots = 0$

ಹಾಗೂ $C_0+C_2+C_4+.....=C_1+C_3+C_5.....=2^{n-1}$

ಎಂಬ ಸಹಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ.

1. $C_0^2+C_1^2+C_2^2+.....+C_n^2$

ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+......+C_nx^n \qquad ..... (1)$$

ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಪದಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ

$$(x+1)^n=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+......+C_n \qquad .....(2)$$

ಸಮೀಕರಣಗಳಾದ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ

$$(1+x)^{2n}=\left(C_0+C_1x+C_2x^2+......+C_nx^n\right)$$

$$\times(C_0x^n+C_1x^{n-1}+......+C_n)$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^n ನ ಸಹಾಂಕವು

$C_0^2+C_1^2+C_2^2+........+C_n^2$.

ಹಾಗೂ $(1+x)^{2n}$ ನ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^n ನ ಸಹಾಂಕವು

$$^{2n}C_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $C_0^2+C_1^2+C_2^2+.....+C_n^2=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

2. $C_0^2-C_1^2+C_2^2-C_3^2+...+(-1)^n C_n^2$

ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗಾಗಲೇ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ

$$C_0+C_1x+C_2x^2+...+C_nx^n=(1+x)^n$$

$$C_0x^n - C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} \ldots + (-1)^n C_n = (x-1)^n$$

ಆದ್ದರಿಂದ (1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(x^2-1) = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n)$$

$$\times (C_0x^n - C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} \ldots + (-1)^n C_n)$$

ಎರಡೂ ಬದಿಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^n ನ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಸಿದರೆ

$(-1)^{n/2} \; {}^nC_{n/2} = C_0^2 - C_1^2 + C_3^2 + \ldots (-1)^n C_n^2$ (nಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ)

n ವಿಷಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ x^n ನ ಸಹಾಂಕವು 0 (ಶೂನ್ಯ)ವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$$C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 + \ldots (-1)^n C_n^2 = 0$$

3. ಷಡ್ರಸಗಳಾದ **ಕಟು** (ಕಹಿ), **ಆಮ್ಲ** (ಹುಳಿ), **ಮಧುರ** (ಸಿಹಿ), **ಲವಣ** (ಉಪ್ಪು), **ತಿಕ್ತ** (ಖಾರ) ಮತ್ತು **ಕಷಾಯ** (ಅಥವಾ ತುವರ ಅಂದರೆ ಒಗರು, ಒಗಚು) ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದೊಂದೇ ರಸವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಗೆ, ಎರಡೆರಡು ರಸಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಗೆ ...., ಹೀಗೆ ಆರು ರಸಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡರೆ ಅಂತಹ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ?

ಈಗ 6 ರಸಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದೇ ರಸವನ್ನು ${}^6C_1$ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಹಾಗೆಯೇ, ಎರಡೆರಡು ರಸಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಗೆ ${}^6C_2$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಹಾಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಒಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$${}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$$

$= 2^6 - {}^6C_0 = 64 - 1 = 63$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಆಯುರ್ವೇದ ಗ್ರಂಥವಾದ **ಸುಶ್ರುತಸಂಹಿತೆ**ಯಲ್ಲಿ ಆಚಾರ್ಯ ಸುಶ್ರುತರು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಹೇಳಿಕೆ ಹೀಗಿದೆ :

ತತ್ರೈತೇಷಾಂ ರಸಾನಾಂ ಸಂಭೋಗಾತ್ ತ್ರಿಷಷ್ಟಿರ್ಭವಂತಿ
ತದ್ಯಥಾ ಪಂಚದಶದ್ವಿಕಾಃ ವಿಂಶಸ್ತ್ರಿಕಾಃ
ಪಂಚದಶ ಚತುಷ್ಕಾಃ ಷಟ್ಪಂಚಕಾಃ
ಏಕಶಃ ಷಡ್ರಸಾಃ ಏಕಃ ಷಟ್ಕ ಇತಿ ॥

ಅಂದರೆ, ಎರಡು ರಸಗಳನ್ನು 15 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಮೂರು ರಸಗಳನ್ನು 20 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ನಾಲ್ಕು ರಸಗಳನ್ನು 15 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಐದು ರಸಗಳನ್ನು 6 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ರಸವನ್ನು 6 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಆರು ರಸಗಳನ್ನು 1 ರೀತಿಯಲ್ಲೂ - ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು 63 ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಷಡ್ರಸಗಳನ್ನು ಬೆರಿಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ

$^6C_2=15, {}^6C_3=20, {}^6C_4=15, {}^6C_5=6, {}^6C_1=6, {}^6C_6=1.$

ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $15+20+15+6+6+1=63$.

(***ಸುಶ್ರುತ ಸಂಹಿತಾ***, ಸೂತ್ರಸ್ಥಾನ, ಅಧ್ಯಾಯ 42, ಶ್ಲೋಕ 19).

6.3.4 ದ್ವಿಪದೀಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಗುಣಗಳು

ದ್ವಿಪದಿಯ n ಘಾತದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ $n + 1$ ಪದಗಳಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ದ್ವಿಪದಿಯ ಈ ಘಾತೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ $(r + 1)$ ನೆಯ ಪದವನ್ನು $(T_r + 1)$ ಎಂದು ಕರೆದರೆ $(x + y)^n$ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ

$$T_{r+1}={}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r \quad \text{ಮತ್ತು} \quad (x+y)^n=\sum_{n=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r \ .$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^8$ ಎಂಬ ದ್ವಿಪದಿಯ ಘಾತದ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^2 ನ ಸಹಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^8$ ಎಂಬುದರ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x^2 ಎಂಬುದು $(r + 1)$ ನೆಯ ಪದದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ

$$T_{r+1}={}^8C_r\, x^{8-r}\times\left(\frac{2}{x^2}\right)^r={}^8C_r\, x^{8-r}\,\frac{2^r}{x^{2r}}={}^8C_r x^{8-3r}\, 2^r$$

ಈಗ, $8-3r=2$. ಅಂದರೆ, $r=2$.

ಆದ್ದರಿಂದ $T_{r+1}=T_3={}^8C_2\, x^2\, 2^2=\frac{8.7}{2}\times 2^2\, x^2=112\, x^2$

ಅಂದರೆ, x^2 ನ ಸಹಾಂಕವು 112.

2. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ ನ ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ದ್ವಿಪದಿಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ 11 ಪದಗಳಿದ್ದು ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದವು 6ನೆಯ

ಪದವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಅದು T_6 $(r=5)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\text{ಈಗ, } T_6={}^{10}C_5\, x^5 \frac{1}{x^5}={}^{10}C_5.$$

3. $\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^{11}$ ನ ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ದ್ವಿಪದಿಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ 12 ಪದಗಳಿದ್ದು 6ನೆಯ ಮತ್ತು 7ನೆಯ ಪದಗಳು ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, T_6 ಮತ್ತು T_7 ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದಗಳು.

$$T_6={}^{11}C_5\, x^6\left(\frac{3}{x^2}\right)^5={}^{11}C_5\times 3^5\times x^{6-10}={}^{11}C_5\times\frac{3^5}{x^4}$$

$$\text{ಮತ್ತು } T_7={}^{11}C_6\, x^5\left(\frac{3}{x^2}\right)^6={}^{11}C_6\times 3^6\times x^{-7}={}^{11}C_6\cdot\frac{3^6}{x^7}$$

4. $\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^{9}$ ನ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x – ಮುಕ್ತ ಪದದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ದ್ವಿಪದಿಯ ವಿಸ್ತಾರದಲ್ಲಿ x – ಮುಕ್ತ ಪದವು T_{r+1} ನಲ್ಲಿ ಇರಲಿ. ಆಗ

$$T_{r+1}=(-1)^r\,.\,{}^9C_r\times x^{9-r}\times\left(\frac{3}{x^2}\right)^r=(-1)^r\,.\,{}^9C_r.3^r\, x^{9-3r}$$

ಈ ಪದವು x ಮುಕ್ತವಾದರೆ ಅದರ ಘಾತಾಂಕವು 0 ಆಗಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $9-3r=0\Rightarrow r=3$

ಹಾಗಾಗಿ, x –ಮುಕ್ತಪದವು

$$T_4={}^9C_3.3^3\times(-1)^3=-{}^9C_3\times 3^3=-\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}\times 3^3=-84\times 3^3=-2268\,.$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

(a) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ (b) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

(c) $\left(2a-\frac{b}{3}\right)^6$ (d) $(2+\sqrt{x})^5$

2. $\left(3x+\frac{1}{x}\right)^{18}$ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ 7ನೇ ಮತ್ತು 11ನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $\left(3x^2-\frac{y}{3}\right)^9$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ 7ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $\left(\frac{a}{2}-\frac{3}{b}\right)^{10}$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ 8ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $(5x+1)^5$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಸ್ಥಿತ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $\left(2x^2-\frac{-}{x^3}\right)^{25}$ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x ಇಲ್ಲದಿರುವ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\left(2-x+3x^2\right)^5$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x^2 ನ ಸಹಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $\left(x^2-x\right)^{20}$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x^{23} ನ ಸಹಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ - 6.2

1. $C_0, C_1, C_2, ...C_n$ ಇವುಗಳು n ದರ್ಜೆಯ ದ್ವಿಪದ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಕೆಳಕಂಡ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

(a) $c_1+2C_2+3C_3+...........+nC_n=n.2^{n-1}$

(b) $C_0,+2C_1+3C_2, ...+(n+1)\,C_n=(n+2)\,2^{n-1}$.

ಅಧ್ಯಾಯ-7

ಗಣಿತ ತರ್ಕ

7.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಗಣಿತ ತರ್ಕದ ಬಗ್ಗೆ ಮೊದಲು ಚಿಂತನೆ ಮಾಡಿದವರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಲೈಬ್ನಿಜ್ (1646-1716). ನಂತರದ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಜಾರ್ಜ್‌ಬೂಲ್, ಡಿಮಾರ್ಗನ್, ಸಿ.ಎಸ್. ಪೀಯರ್ಸ್, ಜಿ. ಫ್ರೆಜ್ ಮತ್ತು ಜಿ.ಪಿಯಾನೊ ಇವರುಗಳು ಗಣಿತತರ್ಕದ ಬಗ್ಗೆ ಇನ್ನಷ್ಟು ಆಳವಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯಿತ್ತರು. ಅನಂತರ ವೈಟ್‌ಹೆಡ್ ಮತ್ತು ಬಟ್ರ್ಯಾಂಡ್ ರಝಲ್ ಅವರುಗಳ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾದ ಪುಸ್ತಕ ಹಾಗೂ ಡೆವಿಡ್ ಹಿಲ್‌ಬರ್ಟ್ ಮತ್ತು ಪಾಲ್ ಬರ್ನೆಸ್ ಅವರುಗಳ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ಚಿಂತನೆಯಿಂದ ಈ ಗಣಿತ ತರ್ಕ ಒಂದು ಸ್ಪಷ್ಟ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿತು.

7.2 ಉಕ್ತಿಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ದತ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ 'ನಿಜ' ಅಥವಾ 'ಸುಳ್ಳು' ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದಾದ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು 'ಉಕ್ತಿ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

1. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತ 180°.
2. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.
3. $\frac{3}{4}$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

ಮೇಲಿನ ಮೊದಲೆರಡು ವಾಕ್ಯಗಳು "ನಿಜ"ವೆಂದೂ ಮೂರನೆಯದು "ಸುಳ್ಳು" ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಉಕ್ತಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1. ನಿಮಗೆ ಹಾರ್ದಿಕ ಸ್ವಾಗತ.
2. ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಕುಳಿತುಕೊ.

ಈ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನಿಜ ಅಥವಾ ಸುಳ್ಳು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಉಕ್ತಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

7.3 ಉಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯ ನಿಜತ್ವ ಅಥವಾ ಸುಳ್ಳುತನವನ್ನು ಅದರ ನಿಜಮೌಲ್ಯವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ನಿಜತ್ವವನ್ನು T ಎಂದೂ, ಸುಳ್ಳನ್ನು F ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

7.4 ಸಂಯೋಜಕಗಳು

ತಾರ್ಕಿಕವಾದ ಒಂದು ವಾದದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ದತ್ತ ಉಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ "ಮತ್ತು", "ಅಥವಾ", "ಆಗಿದ್ದರೆ.... ಆಗ", "ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆದರೆ ಮಾತ್ರ" ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿ ಉಕ್ತಿಗಳ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಪದಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು "ಸಂಯೋಜಕ" ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹೊಸ ಉಕ್ತಿಯ ಜೋಡಣೆಯ ರಚನೆಯಲ್ಲಿ "ಅಲ್ಲ" ಅಥವಾ "ಹೌದು" ಎಂಬ ಪದ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು "ಏಕ ಸಂಯೋಜಕ"ವೆಂದೂ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಸಂಯೋಜಕಗಳನ್ನು ದ್ವಿಸಂಯೋಜಕಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಂಯೋಜಕಗಳಿಂದ ಕೂಡಿಸುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿರುವ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅದರ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳೆಂದ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳಿಲ್ಲದಿರುವ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸರಳೋಕ್ತಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

7.5 ಸಮುಚ್ಚಯ

"ಮತ್ತು" ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಸಂಯೋಜಿತವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು "ಸಮುಚ್ಚಯ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

1. ಆಕಾಶವು ಮೋಡದಿಂದ ಕೂಡಿದೆ.

2. ಹವೆಯು ತಂಪಾಗಿದೆ.

ಇವೆರಡು ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು "ಮತ್ತು" ಎನ್ನುವ ಪದ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು :- "ಆಕಾಶವು ಮೋಡದಿಂದ ಕೂಡಿದೆ ಮತ್ತು ಹವೆಯು ತಂಪಾಗಿದೆ". ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು $p, q, r, \ldots$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. p ಮತ್ತು q ಉಕ್ತಿಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ "p ಮತ್ತು q" ಅನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $p \wedge q$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಸಮುಚ್ಚಯದ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುವಲ್ಲಿ ನಿಯಮವೊಂದನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದೇನೆಂದರೆ, p ಮತ್ತು q ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳೂ ನಿಜವಾಗಿರುವಾಗ ಮಾತ್ರ $p \wedge q$ ನಿಜವಾಗಿರುವುದು, ಬೇರೆ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅದು

ಸುಳ್ಳಾಗಿರುವುದು. ಇದನ್ನು ನಿಜ ಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.1ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.1 : ಸಮುಚ್ಚಯ

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

7.6 ಪರ್ಯಾಯ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾದಾಗ **"ಅಥವಾ"** ಎಂಬ ಸಂಯೋಜಕದಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $p \vee q$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿ "ಅಥವಾ" ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಸಂಯೋಜಿತವಾಗಿರುವ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು **ಪರ್ಯಾಯ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

1. ಸೀತೆಯು ಜನಕರಾಜನ ಮಗಳು.
2. ಸೀತೆಯು ಶ್ರೀರಾಮನ ಹೆಂಡತಿ.

ಈ ಉಕ್ತಿಗಳ ಪರ್ಯಾಯವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು :

"ಸೀತೆಯು ಜನಕರಾಜನ ಮಗಳು ಅಥವಾ ಶ್ರೀರಾಮನ ಹೆಂಡತಿ".

p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾದಾಗ $p \vee q$ ನ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕ 7.2ರ ಮೇಲೆ ಆಧಾರಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. p ಮತ್ತು q ಉಕ್ತಿಗಳೆರಡೂ ಸುಳ್ಳಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ p ಮತ್ತು q ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ p ಮತ್ತು q ಉಕ್ತಿಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಪರ್ಯಾಯೋಕ್ತಿ p ಮತ್ತು q ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.2 : ಪರ್ಯಾಯೋಕ್ತಿ

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p ಮತ್ತು q ಎರಡೂ ಉಕ್ತಿಗಳು ಸುಳ್ಳಾದಾಗ ಮಾತ್ರ $p \vee q$ ಪರ್ಯಾಯೋಕ್ತಿಯು ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ.

7.7 ನಿಬಂಧಿತ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿದ್ದು "p ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ q" ಎನ್ನುವ ರೂಪದ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು **"ನಿಬಂಧಿತ"** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ p ಅನ್ನು ದತ್ತವೆಂದೂ q ಅನ್ನು ತೀರ್ಮಾನವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು ನಾವು $p \rightarrow q$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ :

1. ABC ತ್ರಿಕೋಣವು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋಣ.
2. $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

ಈ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಿಬಂಧಿತ ಸಂಯೋಜಕದ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ, "ABC ತ್ರಿಕೋನವಾದರೆ ಆಗ $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$." p ಮತ್ತು q ಎರಡು ಯಾವುದೇ ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರುವಾಗ ನಿಬಂಧಿತ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಈ ಮುಂದಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ. p ಯು ನಿಜವಾಗಿದ್ದು q ಸುಳ್ಳಾಗಿರುವಾಗ ಮಾತ್ರ $p \rightarrow q$ ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅದು ನಿಜವಾಗಿರುವುದು (ಕೋಷ್ಟಕ 7.3ನ್ನು ನೋಡಿ).

ನಿಜಮೌಲ್ಯಕೋಷ್ಟಕ 7.3 : ನಿಬಂಧಿತ

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

7.8 ಸಮತೋಕ್ತಿಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿದ್ದು, "p ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ q ಮತ್ತು q ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ p" ಎನ್ನುವ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು **"ಸಮತೋಕ್ತಿ"** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು ನಾವು $p \leftrightarrow q$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : 1. $2n$ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆ.

2. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಮತೋಕ್ತಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು. "$2n$ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 2 ರಿಂಬ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ $2n$ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ".

ಸಮತೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸಲು ನಾವು ಈ ಮುಂದಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ : p ಮತ್ತು q ಎರಡೂ ನಿಜವಾಗಿರುವಾಗ ಹಾಗೂ ಎರಡೂ ಸುಳ್ಳಾಗಿರುವಾಗ ಮಾತ್ರ $p \leftrightarrow q$ ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ

(ಕೋಷ್ಟಕ 7.4).

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.4 : ಸಮತೋಕ್ತಿ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

7.9 ನಕಾರ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : p ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ "ಇಲ್ಲ" ಎನ್ನುವ ಪದವನ್ನು ಯುಕ್ತ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯುವ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು p ಉಕ್ತಿಯ **"ನಕಾರ"** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಅದನ್ನು "$\sim p$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ".

ಉದಾಹರಣೆ : p : 6 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ;

$\sim p$: 6 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ.

ನಕಾರದ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 7.5ರಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.5 : ನಕಾರ

p	$\sim p$
T	F
F	T

ಸೂಚನೆ : ಉಕ್ತಿ p ಮತ್ತು ಇದರ ನಕಾರ $\sim p$ ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸುಳ್ಳಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ನಿಜವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ (ಕೋಷ್ಟಕ 7.5).

7.10 ವಿಲೋಮ

ಪ್ರತಿಧನ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಲೋಮ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರುವಾಗ **"$p \to q$"** ದತ್ತ ನಿಬಂಧವಾಗಿದ್ದರೆ

(i) $q \to p$ ಅನ್ನು **ವಿಲೋಮ** ಎಂದೂ,

(ii) $\sim p \to \sim q$ ಅನ್ನು **ಪ್ರತಿಲೋಮ** ಎಂದೂ,

(iii) $\sim q \to \sim p$ ಅನ್ನು **ಪ್ರತಿಧನ** ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : "ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳಿದ್ದರೆ ಆಗ ಮಳೆ ಬರುತ್ತದೆ" ಎನ್ನುವುದು ದತ್ತ ನಿಬಂಧಿತವಾಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ p : ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳಿವೆ, q : ಮಳೆಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರಲಿ.

(i) ಇದರ ವಿಲೋಮ, $q \rightarrow p$: ಮಳೆ ಬಂದರೆ ಆಗ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ಇದರ ವಿಲೋಮ, $\sim p \rightarrow \sim q$: ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮಳೆ ಬರುವುದಿಲ್ಲ.

(iii) ಇದರ ಪ್ರತಿಧನ, $\sim q \rightarrow \sim p$: ಮಳೆ ಬರದಿದ್ದಾಗ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ ಮೋಡಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ.

7.11 ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಂತಹ ಎರಡು ಸರಳ ಉಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ನಿಜ ಉಕ್ತಿಗಳು ಅಥವಾ ಎರಡು ಸುಳ್ಳು ಉಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

p ಮತ್ತು q ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ "$p \equiv q$" ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.6 : ನಿಬಂಧಿತ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಧನ

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ಮೇಲಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.6ರಲ್ಲಿ 3ನೇ ಮತ್ತು 6ನೇ ಉದ್ದಸಾಲು (ಕಲಮು)ಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ಒಂದೇ ತೆರನಾದ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಇರುವುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಈ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ:

$$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$$

7.12 ನಿತ್ಯಸತ್ಯಗಳು

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ಬಿಡಿ ಉಕ್ತಿಗಳು ನಿಜವಾಗಿರಲಿ ಅಥವಾ ಸುಳ್ಳಾಗಿರಲಿ ಆದರೆ ಆ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **"ನಿತ್ಯಸತ್ಯ"**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : p : ಹಣ್ಣು ಸಿಹಿಯಾಗಿದೆ.

$\sim p$: ಹಣ್ಣು ಸಿಹಿಯಾಗಿಲ್ಲ.

$p \vee \sim p$ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.7ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.7 : ಉಕ್ತಿ-ನಕಾರೋಕ್ತಿಗಳ ಪರ್ಯಾಯ

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

ಇಂತಹ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

7.13 ಅಸಮಾಂಜಸತೆ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ಸಂಯುಕೋಕ್ತಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಸುಳ್ಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ಅಸಮಂಜಸತೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

p ಒಂದು ಉಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದರೆ $p \wedge \sim p$ ಸಂಯುಕೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 7.8ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.8 : ಅಸಂಮಜಸತೆ

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
T	F	F
F	T	F

ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ 1 : ನಕಾರೋಕ್ತಿಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿಯು ದತ್ತ ಉಕ್ತಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ $\sim(\sim p) \equiv p$

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.9 : ನಕಾರೋಕ್ತಿಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿ

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

ಮೇಲಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.9ರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಉದ್ದಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಸಮಾನತೆಯಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 1 ಸಾಧಿತವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2 : ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯದ ನಕಾರವು ಅವುಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಉಕ್ತಿಗಳ ನಕಾರಗಳ ಪರ್ಯಾಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು. ಅಂದರೆ
$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ಎಂದಾಗುವುದು.

p ಮತ್ತು q ಗಳು ದತ್ತ ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಅವುಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ, ನಕಾರ ಹಾಗೂ ನಕಾರಗಳ ಪರ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.10ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.10 : ಸಮುಚ್ಚಯೋಕ್ತಿಯ ನಕಾರ

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

ಕೋಷ್ಟಕ 7.10ರಲ್ಲಿ 4ನೇ ಮತ್ತು 7ನೇ ಉದ್ದ ಸಾಲು (ಕಲಮು)ಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 2 ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3 : p ಮತ್ತು q ಗಳು ದತ್ತ ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರಲಿ. ಎರಡು ಉಕ್ತಿಗಳ ಪರ್ಯಾಯದ ನಕಾರವು ಅವುಗಳ ನಕಾರಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.11 : ಪರ್ಯಾಯೋಕ್ತಿಯ ನಕಾರ

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

ಕೋಷ್ಟಕ 7.11ರಲ್ಲಿ 4ನೇ ಮತ್ತು 7ನೇ ಕಲಮುಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\sim(p \vee q)$ ಮತ್ತು $(\sim p \wedge \sim q)$ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

ಪ್ರಮೇಯ 4 : p ಮತ್ತು q ಗಳು ದತ್ತ ಉಕ್ತಿಗಳಾಗಿರಲಿ. ನಕಾರಾತ್ಮಕ ನಿಬಂಧಿತವು ದತ್ತ ಮತ್ತು ನಕಾರಾತ್ಮಕ ತೀರ್ಮಾನಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವುವು, ಅಂದರೆ $\sim(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$

ನಿಜಮೌಲ್ಯಕೋಷ್ಟಕ 7.12 : ನಿಬಂಧನೆಯ ನಕಾರೋಕ್ತಿ

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	T	F

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕ 7.12ರಲ್ಲಿ 4ನೇ ಕಲಮು ಮತ್ತು 6ನೇಕಲಮುಗಳ

ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\sim(p \rightarrow q)$ ಮತ್ತು $(p \wedge \sim q)$ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

ಪ್ರಮೇಯ 5 : p ಮತ್ತು q ದತ್ತಗಳಾದಲ್ಲಿ

$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$. ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.13 ರಲ್ಲಿ 4ನೇ ಕಲಮು ಮತ್ತು 9ನೇ ಕಲಮುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 5 ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

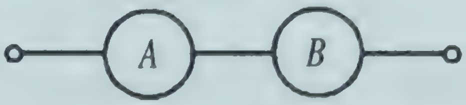
ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.13 : ಸಮತೋಕ್ತಿಯ ನಕಾರ

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \vee p$	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
T	T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	T	T	T	T

ನಿಜಮೌಲಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.13ರಲ್ಲಿ 4ನೇ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಉದ್ದಸಾಲುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವುದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

7.14 ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕೀಟ್

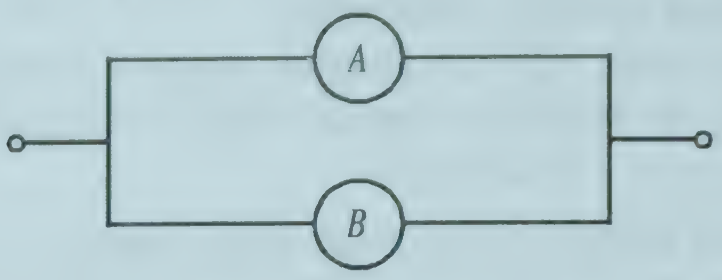
A, B, C, ... ಇವುಗಳು ವಿದ್ಯುತ್ ಸ್ವಿಚ್‌ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಿ. A ಸ್ವಿಚ್ ಚಾಲನೆಯಲ್ಲಿದ್ದಾಗ A' ಸ್ಥಗಿತವೆಂದೂ, A' ಚಾಲನೆಯಲ್ಲಿದ್ದಾಗ A ಸ್ಥಗಿತವೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. A ಮತ್ತು B ಸ್ವಿಚ್‌ಗಳನ್ನು **ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ** ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಸರ್ಕೀಟ್ ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತಿರುತ್ತದೆ :



ಚಿತ್ರ 7.1 ಶ್ರೇಣಿ ಜೋಡಣೆ

ಇದನ್ನು **ಶ್ರೇಣಿ ಜೋಡಣೆ**ಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೂ A ಮತ್ತು B ಸ್ವಿಚ್‌ಗಳ **ಸಮುಚ್ಚಯ**ವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಈ ಶ್ರೇಣಿ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು $(A \wedge B)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 7.1).

ಅದೇ ರೀತಿ A ಮತ್ತು B ಸ್ವಿಚ್‌ಗಳು **ಸಮಾಂತರವಾಗಿ** ಜೋಡಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಅದರ ಸರ್ಕೀಟ್ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 7.2).



ಚಿತ್ರ 7.2 ಸಮಾಂತರ ಜೋಡಣೆ

ಈ ಸಮಾಂತರ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು A ಮತ್ತು B ಸ್ವಿಚ್‌ಗಳ **ಪರ್ಯಾಯವೆಂದು** ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು $(A \vee B)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.14 : ಶ್ರೇಣಿ ಜೋಡಣೆ

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

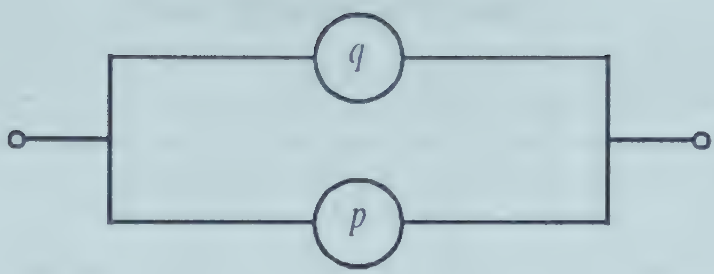
ಶ್ರೇಣಿ ಜೋಡಣೆ ಮತ್ತು ಸಮಾಂತರ ಜೋಡಣೆಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೋಷ್ಟಕ 7.14 ಮತ್ತು 7.15ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.15 : ಸಮಾಂತರ ಜೋಡಣೆ

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿ : "ಮತ್ತು" ಮತ್ತು "ಅಥವಾ" ಈ ಸಂಯೋಜಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ರಚಿಸುವ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು "ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ವಿದ್ಯುತ್ ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕೀಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುವುದು.

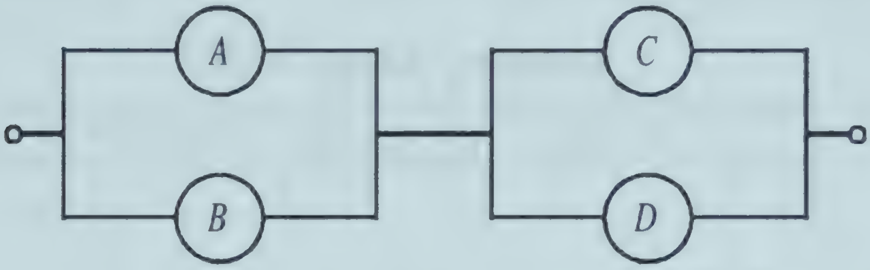
ಉದಾ 1. : ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕೀಟ್‌ನ (ಚಿತ್ರ 7.3) ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 7.3 ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿ : ಪರ್ಯಾಯ

ಇದರ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿಯು $(q \vee p)$

2. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ ಈ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿಯ ಸರ್ಕೀಟ್ ರಚಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 7.4 ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿ : ಎರಡು ಪರ್ಯಾಯ ಜೊತೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

I ಕೆಳಗಿನ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

1) 2 ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ 10 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

p : 2 ಸಮಸಂಖ್ಯೆ , q : 10 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ

ಆಗ, ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $p \rightarrow q$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

2) 4 ಅನ್ನು 2 ಭಾಗಿಸದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ 1 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆಗ 2 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

p : 4ಅನ್ನು 2 ಭಾಗಿಸಲಿ, $\sim p$: 4 ಅನ್ನು 2 ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ ;
q : 1 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ, r : 2 ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ

ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow r$

II ಕೆಳಗಿನ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ

1. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.16

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

ಮೇಲಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ 7.16ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಕಲಮಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ನಿಜ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ನಿತ್ಯಸತ್ಯ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2. $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.17

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$
T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F	F

ಮೇಲಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯದ ಕೋಷ್ಟಕ 7.17 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಕಲಮಿನ ಎಲ್ಲ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಸುಳ್ಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯು ಒಂದು **ಅಸಮಂಜಸತೆ.**

3. $(p \vee \sim q)$ ಮತ್ತು $(\sim p \rightarrow \sim q)$ ಇವುಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವೆ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.18

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.18ರಲ್ಲಿ 5ನೇ ಮತ್ತು 6ನೇ ಕಲಮುಗಳ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

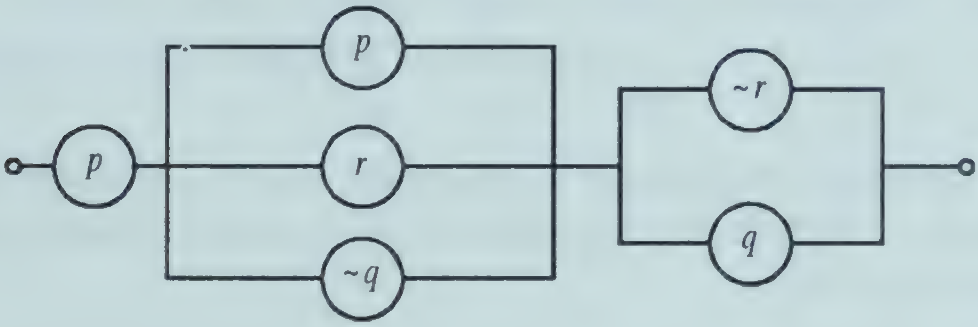
4. $p \rightarrow (\sim p \vee q)$ ಇದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೆ ಅಥವಾ ಅಸಮಂಜಸತೆಯೆ ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.19

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow (\sim p \vee q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

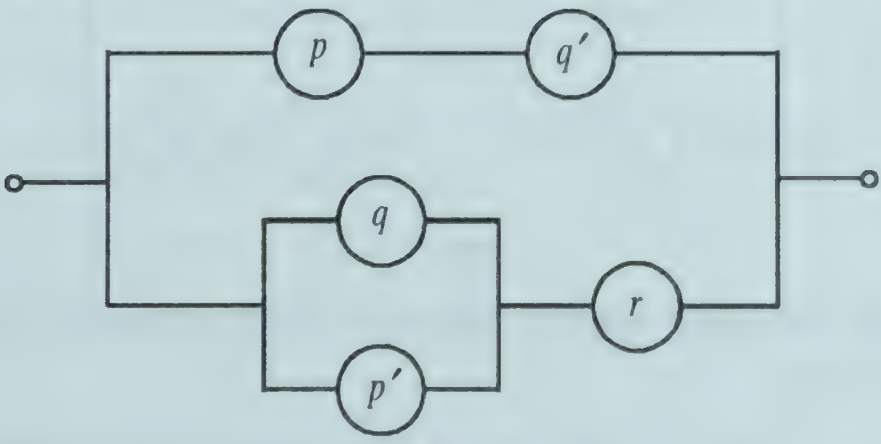
ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.19ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಉದ್ದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಎಲ್ಲ T ಅಥವಾ ಎಲ್ಲ F ಆಗಲೀ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೂ ಅಲ್ಲ, ಅಸಮಂಜಸತೆಯೂ ಅಲ್ಲ.

5. $[p \wedge \{p \vee r\} \vee \sim q] \wedge (\sim r \vee q)$ ಈ ಬಹುಪದಿಯ ತಾರ್ಕಿಕ ಸರ್ಕೀಟ್ ಅನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಉತ್ತರ : ರಚನೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 7.5ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 7.5

6. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕೀಟ್‌ನ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 7.6

ಚಿತ್ರ 7.6ರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿಯು,
$[(p \wedge q') \vee [(q \vee p') \wedge r]$ ಆಗಿದೆ.

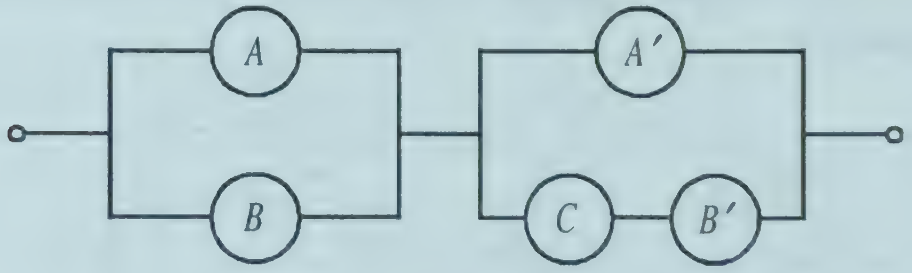
7. $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ಈ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯು ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.20

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

ಮೇಲಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕದ 7.20ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಕಲಮ್‌ನ ಎಲ್ಲ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ನಿಜವೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯು ಒಂದು **ನಿತ್ಯಸತ್ಯ**ವೆಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

8. $(A \vee B) \wedge [A' \vee (C \wedge B')]$ ಈ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿಯ ಸರ್ಕೀಟ್‌ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 7.7

ದತ್ತ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 7.7ರಲ್ಲಿ ಸರ್ಕೀಟ್ ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

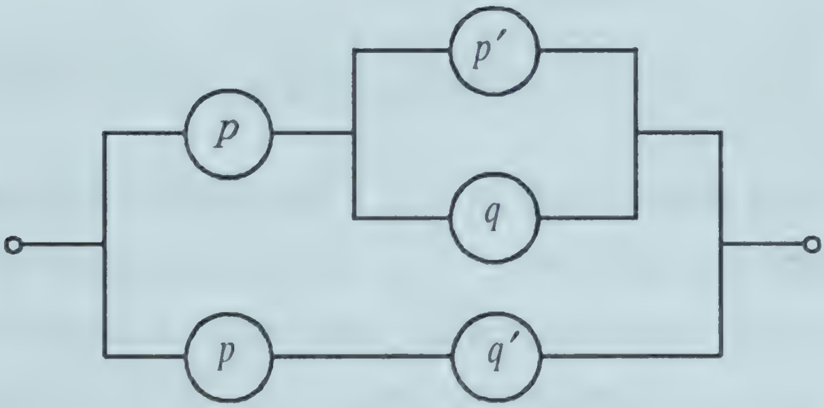
9. $p \rightarrow (q \wedge r)$ ಮತ್ತು $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ ಈ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮನಾಗಿರುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.21

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.21ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯೆರೆಡು ಕಲಮ್‌ಗಳಲ್ಲಿನ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

10. ಕೆಳಗಿನ ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕೀಟ್‌ಗೆ ಅದರ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 7.8

ಚಿತ್ರ 7.8ರಲ್ಲಿರುವ ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕೀಟ್‌ನ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಪದಿಯು ಈ ರೀತಿ ಇದೆ :

$[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee [p \wedge \sim q]$

ಈ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.22ರಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತಿದೆ.

ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕ 7.22

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$p \wedge \sim q$	$[p \wedge (\sim p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)]$
T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F	F	F

ಅಭ್ಯಾಸ - 7

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(a) ಶಾರದೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಹಾಡುತ್ತಾಳೆ ಮತ್ತು ಶಾಂತಲೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ನಾಟ್ಯವಾಡುತ್ತಾಳೆ.

(b) ಮಳೆ ಬಂದರೆ ಆಗ ಬೆಳೆ ಆಗುತ್ತದೆ.

(c) 2 ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ 5 ಕೂಡ ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವುದು.

(d) 4 ಒಂದು ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಅದು ಒಂದು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆ.

(e) $2 + 3 = 5$ ಮತ್ತು $2 \times 3 = 6$

2 ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

p : ಮಕ್ಕಳು ಜಾಣರಾಗುತ್ತಾರೆ, q : ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುತ್ತಾರೆ

r : ಶಾಲೆಗೆ ರಜೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ, s : ಮಕ್ಕಳು ಸಂತೋಷಪಡುತ್ತಾರೆ.

(a) ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಅವರು ಸಂತೋಷಪಡುತ್ತಾರೆ.

(b) ಶಾಲೆಗೆ ರಜೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ.

(c) ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ ಆದ್ದರಿಂದ ಮಕ್ಕಳು ಜಾಣರಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಅವರು ಸಂತೋಷವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

(d) ಮಕ್ಕಳು ಜಾಣರಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಮಕ್ಕಳು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಶಾಲೆಗೆ ಹೋದರೆ ಮಾತ್ರ ಮಕ್ಕಳು ಜಾಣರಾಗುತ್ತಾರೆ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಕ್ತಿಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\sim(p \rightarrow \sim q)$

(ii) $\sim p \vee q$

(iii) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

(iv) $\sim(p \wedge q) \vee (q \leftrightarrow p)$

(v) $p \rightarrow (\sim p \vee q)$

(vi) $(p \vee r) \wedge q$

(vii) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

(viii) $p \rightarrow (q \wedge r)$

4. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳ ನಕಾರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) $p \vee (q \wedge r)$

(2) $p \wedge (q \rightarrow r)$

(3) $\sim p \rightarrow q$

(4) $\sim p \leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$

(5) $(p \wedge q) \wedge \sim(q \vee r)$

(6) $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

(7) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

(8) 2 ರಿಂದ 4 ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಆಗ 4 ಒಂದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ

(9) ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗುವುದು.

(10) ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯು 1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ.

5. ಕೆಳಗಿನ ನಿಬಂಧಿತಗಳ ವಿಲೋಮ, ಪ್ರತಿಲೋಮ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಧನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) $\sim p \rightarrow \sim q$ (2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(3) $x^2 = y^2$ ಆದರೆ, ಆಗ $x = y$

(4) n ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಆಗ n ಒಂದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ.

(5) $x^2 = 1$ ಆದರೆ ಆಗ $x = \pm 1$.

6. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳು ನಿತ್ಯಸತ್ಯಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

(ii) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge (\sim q)$

(iii) $[(p \vee q) \wedge (\sim q)] \rightarrow (p \vee q)$

(iv) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

(v) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim p)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

7. p ಉಕ್ತಿಯು $x + 3 = 9$ ಎಂದೂ q ಉಕ್ತಿಯು $x = 6$ ಎಂದೂ ಇದ್ದು $p \rightarrow q$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಇದರ ವಿಲೋಮ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಧನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

8. " ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ" ಇದರ ನಕಾರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

9. (*a*) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee \sim q)$ ಒಂದು ಅಸಮಂಜಸತೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(*b*) $(p \wedge q) \wedge (\sim p)$ ಒಂದು ಅಸಮಂಜಸತೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. $[(p \wedge q) \vee \sim r] \leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \wedge (p \wedge q)]$ ಇದು ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೇ, ಅಸಮಂಜಸತೆಯೇ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಅಲ್ಲವೆ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

11. (*a*) $p \rightarrow (q \wedge r)$ ಮತ್ತು $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(*b*) $\sim [p \rightarrow (q \wedge r)]$ ಮತ್ತು $(p \rightarrow q) \wedge p \wedge (\sim q \wedge \sim r)$ ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ಕೆಳಗಿನ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಘಾತಪದಿಗಳ ಸರ್ಕೀಟ್‌ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(i) $(A \wedge B) \wedge \left[A^1 \vee (C \vee B^1)\right]$

(ii) $(A \wedge B) \wedge (C \vee D)$

(iii) $(A \wedge B) \vee (A^1 \wedge B^1)$

(iv) $A \wedge (A^1 \wedge B) \vee B^1$

13. ಕೆಳಗಿನ ಸರ್ಕೀಟ್‌ನ ಬೂಲಿಯನ್ ಬಹುಘಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ-8

ಗಣಗಳು, ಸಂಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

8.1 ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ - ಪುನರ್ನಿರೂಪಣೆ

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳ ಸಮುದಾಯವನ್ನು ಒಂದು 'ಗಣ'ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬೀಗದಕೈಗೊಂಚಲು, ಪುಷ್ಪಗುಚ್ಛ, ನಕ್ಷತ್ರಪುಂಜ ಹೀಗೆ ಅನೇಕ ಸಮೂಹಗಳನ್ನು ಹೆಸರಿಸಬಹುದು. ಈ ರೀತಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗುವುದನ್ನು ಗಣಿತಜ್ಞರು "ಗಣ" ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಗಣಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ *A, B, C,*........ ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ:

(i) $N = \{n | n$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

(ii) $Z = \{a | a$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$

ಈ ಗಣಗಳ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅನಂತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು "ಅನಂತ ಗಣ" ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತೇವೆ.

(iii) $A =$

(iv) $B = \left\{x | x < 10\right\}$

ಈ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಪರಿಮಿತ (ಸಾಂತ)ವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ನಾವು "ಪರಿಮಿತ" (ಪರ್ಯಾಪ್ತ) ಅಥವಾ "ಸಾಂತ" ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಶೂನ್ಯಗಣ : ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳೇ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಗಣವನ್ನು "ಶೂನ್ಯಗಣ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನು ϕ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :

(i) ಭಾರತದೇಶದ ಈವರೆಗಿನ ಮಹಿಳಾ ರಾಷ್ಟ್ರಾಧ್ಯಕ್ಷರ ಗಣ.

(ii) 23ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು 29ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

(iii) $B = \left\{ x \middle| x^2 = 4,\ x \text{ ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ} \right\}$.

ಉಪಗಣ : A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ, A ಗಣದ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳೂ B ಗಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, A ಗಣವನ್ನು B ಗಣದ ಉಪಗಣವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $A \subset B$ ಅಥವಾ $A \supset B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ, "A ಯು B ಯಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿದೆ" ಅಥವಾ "B ಯು A ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ" ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರತಿಗಣವೂ ತನ್ನದೇ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ B ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ $A \subset A$. ಹಾಗೆಯೇ, ಶೂನ್ಯಗಣವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $\phi \subset A$

ಉದಾಹರಣೆ : $N = \{1, 2, 3, ...\}$ ಎಂಬುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದು, $A = \{1, 3, 5, ...\}$ ಎಂಬುದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ, $A \subset N$ ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ.

ಘಾತಗಣ : S ಒಂದು ಗಣವಾಗಿದ್ದು, ಇದರ ಎಲ್ಲ ಉಪಗಣಗಳ ಸಮೂಹವನ್ನು 'ಘಾತಗಣ'ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು $P(S)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. S ಗಣದಲ್ಲಿ n ಗಣಾಂಶಗಳಿದ್ದರೆ, S ನ ಘಾತಗಣದಲ್ಲಿನ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2^n ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $S = \{a, b\}$

ಘಾತಗಣ : $P(S) = \{(a, b), (a), (b), \phi\}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮಗಣಗಳು : A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ A ಯ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳೂ B ಯಲ್ಲಿದ್ದು, B ಯ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳೂ A ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳನ್ನು ಸಮಗಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $A = B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $A \subset B$ ಮತ್ತು $B \subset A$ ಆಗಿದ್ದರೆ $A = B$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ವಿಶ್ವಗಣ : ಒಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಗಣವನ್ನು ವಿಶ್ವಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು U ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಗಣ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು :

(i) **ಸಂಯೋಗ :** ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ಪಡೆದ ಗಣವನ್ನು ದತ್ತಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

A ಮತ್ತು B ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $A \cup B = \{x | x \in A$ ಅಥವಾ $x \in B$ ಅಥವಾ $x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B\}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(*ii*) **ಛೇದನ :** ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗಣವನ್ನು ಅವುಗಳ ಛೇದನಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳ ಛೇದನವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $A \cap B = \{x | x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B\}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಂತರ : A ಮತ್ತು B ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. A ಗಣದಲ್ಲಿದ್ದು, B ಗಣದಲ್ಲಿಲ್ಲದಿರುವ ಅಂಶಗಳುಳ್ಳ ಗಣವನ್ನು ದತ್ತಗಣಗಳ ಅಂತರವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, $A - B = \{x | x \in A$ ಮತ್ತು $x \notin B\}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಪೂರಕ : U ಒಂದು ವಿಶ್ವಗಣವಾಗಿದ್ದು, A ಯಾವುದೇ ಗಣವಾದಾಗ $U - A$ ಅನ್ನು A ಯ ಪೂರಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅದನ್ನು A_1 ಅಥವಾ A_c ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ $A^c = U - A = \left\{x | x \in U \text{ ಮತ್ತು } x \notin A\right\}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಮತ್ತು ಕಾರ್ಟೀಶಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧ : (a,b) ಎಂಬ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ a ಮೊದಲನೇ ಅಂಶ b ಎರಡನೆಯ ಅಂಶ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. (a,b) ಮತ್ತು (c,d) ಎಂಬ ಎರಡು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಲು, $a = c$ ಮತ್ತು $b = d$ ಆಗಿರಬೇಕು. A ಮತ್ತು B ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಕಾರ್ಟೀಶಿಯನ್ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು $A \times B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$$A \times B = \left\{(a,b) \,|\, a \in A, b \in B\right\}.$$

ಉದಾಹರಣೆ : 1. $A = \{1,2\}$ ಮತ್ತು $B = \{4,5,6\}$ ಆದಾಗ $A \times B$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$ ಆಗುತ್ತದೆ.

2. $A = \{3,5,7\}, B = \{6,7,8\}$ ಮತ್ತು $C = \{7,8,9\}$ ಆದಾಗ

$(A \cap B) \times (B \cap C)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $(A\cap B)=\{7\}$ ಮತ್ತು $(B\cap C)=\{7,8\}$.

$\therefore \quad (A\cap B)\times(B\cap C)=\{(7,7),(7,8)\}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

3. $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{1,2\}$ ಮತ್ತು $C=\{2,4\}$ ಆದರೆ

1) $A\times(B-C)$, 2) $(A-B)\times C$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1) ಈಗ, $B-C=\{1\}$ $\therefore A\times(B-C)=\{(-1,1),(0,1),(1,1)\}$

2) $A-B=\{-1,0\}$ $\therefore (A-B)\times C=\{(-1,2),(-1,4),(0,2),(0,4)\}$

4. $A=\{x|x+5x+6=0\}$, $B=\{x|x^2-1=0\}$ ಮತ್ತು

$C=\{x|x^2-5x=0\}$ ಆದರೆ $(A-B)\times(A-C)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x^2+5x+6=0 \Rightarrow (x+3)(x+2)=0 \Rightarrow x=-3$ ಅಥವಾ $x=-2$

$\therefore A=\{-3,-2\}$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ $\therefore B=\{-1,1\}$

$x^2-1=0 \Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow x=0$ ಅಥವಾ $x=5$

$\therefore C=\{0,5\}$

$(A-B)=\{1,2,3\}, A-C=\{-2,-3\}$

$\therefore (A-B)\times(A-C)=\{(-2,-2),(-2,-3),(-3,-2),(-3,-3)\}$

ಆಗುತ್ತದೆ.

8.2 ಸಂಬಂಧಗಳು

A ಒಂದು ಗಣವಾದರೆ, $A\times A$ ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ R ಅನ್ನು A ಮೇಲಣ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಮಾನತೆ ಸಂಬಂಧ : A ಒಂದು ಗಣವಾಗಿದ್ದು R ಅದರ ಮೇಲಿನ ಸಮಾನತೆ ಸಂಬಂಧ ಎನಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

1. **ಪ್ರತಿಫಲನ :** ಪ್ರತಿಫಲನ ಸಂಬಂಧವೆಂದರೆ Aನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶ a ಗೂ aRa ಆಗಿರಬೇಕು.

2 ಸಮಾಂಗತೆ : ಸಮಾಂಗತೆ ಸಂಬಂಧವೆಂದರೆ, A ನ ಪ್ರತಿ a, b ಅಂಶಗಳಿಗೆ aRb ಆಗಿದ್ದರೆ bRa ಯೂ ಆಗಿರಬೇಕು.

3 ವಾಹಕ : ವಾಹಕ ಸಂಬಂಧವೆಂದರೆ, A ನ ಪ್ರತಿ a,b ಮತ್ತು c ಅಂಶಗಳಿಗೆ aRb ಮತ್ತು bRc ಯೂ ಆಗಿದ್ದರೆ aRc ಆಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ : 1. $A=\{1,2,3\}, B=\{-1,2,4,5\}$ ಆದಾಗ

$R=\{(x, y), | x\in A, y\in B$ ಮತ್ತು $(x<y\}$ ಆಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$R=\{(1,2),(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}.$

2 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ಆದರೆ,

$R=\{(x, y) | x\in A, y\in B$ ಮತ್ತು $y=x^2\}$ ಆಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$R=\{(1,1),(2,4),(3,9)\}.$

3 $A=\{1,2,3,4,\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಗಣದ ಮೇಲಣ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಪ್ರತಿಫಲನ, ಸಮಾಂಗತೆ ಮತ್ತು ವಾಹಕ ಸಂಬಂಧವೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a)$ $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$b)$ $R_2=\{(2,2),(3,3),4,4)\}$

$c)$ $R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2)\}$

$a)$ $R_4=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)(1,4),(4,1)\}$

ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ತಿಳಿಯುವ ಅಂಶಗಳೆಂದರೆ,

$R_1 \rightarrow$ ಪ್ರತಿಫಲನ, ಸಮಾಂಗತೆ ಮತ್ತು ವಾಹಕ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

$R_2 \rightarrow$ ಸಮಾಂಗತೆ, ವಾಹಕ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಫಲನವಲ್ಲದ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

$R_3 \rightarrow$ ಪ್ರತಿಫಲನ, ವಾಹಕ ಮತ್ತು ಸಮಾಂಗತೆಯಲ್ಲದ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

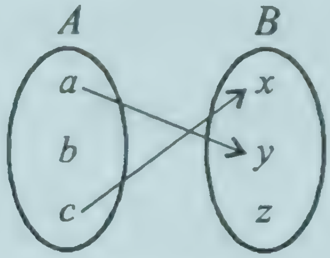
$R_4 \rightarrow$ ಪ್ರತಿಫಲನ, ಸಮಾಂಗತ ಮತ್ತು ವಾಹಕವಲ್ಲದ ಸಂಬಂಧವಾಗಿದೆ.

8.3 ಉತ್ಪನ್ನಗಳು :

A ಎಂಬ ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶ x ಗೂ B ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಂಬಂಧಿತವಾದ ಏಕೈಕ ಗಣಾಂಶ y ಎಂಬುದಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸುವ ನಿರ್ಧಿಷ್ಟವಾದ ನಿಯಮವನ್ನು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಹ ಒಂದು ನಿಯಮವನ್ನು (ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು) f ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, y ಗಣಾಂಶವನ್ನು x ಗಣಾಂಶದ 'ಛಾಯೆ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $y=f(x)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

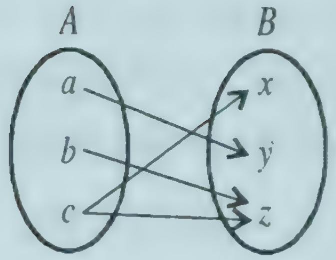
ಉದಾಹರಣೆ : $A=\{a,b,c\}$ ಮತ್ತು $B=\{x,y,z\}$ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಮೇಲಣ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ f, g, h ಇವುಗಳು ಉತ್ಪನ್ನಗಳೇ ಅಲ್ಲವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

(i) $f: A \to B$



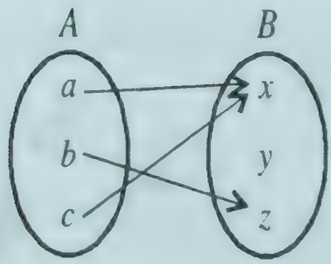
ಚಿತ್ರ 8.1

(ii) $g: A \to B$



ಚಿತ್ರ 8.2

(iii) $h: A \to B$



ಚಿತ್ರ 8.3

(i) A ಗಣದಲ್ಲಿರುವ b ಅಂಶಕ್ಕೆ B ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವು ಹೊಂದಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ f ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (ಚಿತ್ರ 8.1).

(ii) A ಗಣದಲ್ಲಿರುವ c ಅಂಶಕ್ಕೆ B ನಲ್ಲಿರುವ x ಮತ್ತು z ಎರಡು ಅಂಶಗಳು ಹೊಂದಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ g ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ (ಚಿತ್ರ 8.2).

(iii) h ಉತ್ಪನ್ನದ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಸಂಬಂಧವು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಏಕ - ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನ : (*i*) $f:A\rightarrow B$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ $x,x^1\in A$,ಗಳಿಗೂ $f(x)=f(x^1)$ ಆದಾಗ $x=x^1$ ಎಂದಾದರೆ, ಅಂದರೆ $f(x)=f(x^1)\Rightarrow x=x^1$ ಆದರೆ ಅಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು 'ಏಕ - ಏಕ' ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಅಂತಃಕ್ಷೇಪನ (injective) ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

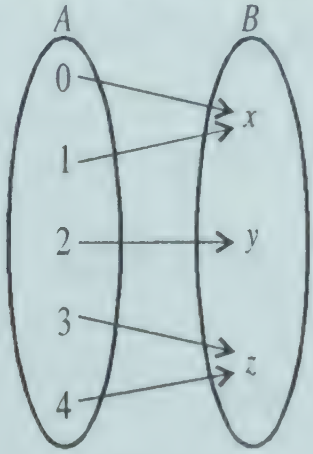
ಉದಾಹರಣೆ : (1) $f:R\rightarrow R$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x)=x^3$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ಏಕ - ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನವು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) $f:R\rightarrow R$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x)=x^2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು ಏಕ - ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರಣ, $f(2)=f(-2)=4$ ಅಂದರೆ ಎರಡು ಅಸಮಾನ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 2 ಮತ್ತು –2ರ ಛಾಯೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದು.

ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನ : $f:A\rightarrow B$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ f ನ ಬಿಂಬಗಣವು (range) B ಆದಾಗ, ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿ $y\in B, f(x)=y$ ಆಗಿರುವಂತೆ $\exists x\in A$.

ಈ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಕ್ಷೇಪನ (surjective) ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : (1) $A=\{0,1,2,3,4\}$ ಮತ್ತು $B=\{x,y,z,\}$ಎಂದಿರಲಿ. $g:A\rightarrow B$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಚಿತ್ರ 8.4ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿರುವಂತೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಮಾಡಿದರೆ



ಚಿತ್ರ 8.4

$g(0)=g(1)=x,\ g(2)=y, g(3)=g(4)=z$ ಆಗುತ್ತದೆ.

g ಯ ಬಿಂಬಗಣವು B ಆಗಿರುವುದರಿಂದ g ಯು ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ.

(2) $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c,d\}$ ಆಗಿರಲಿ.

$f:A\to B$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, f ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $d\in B$ ಯಾವುದೇ A ಗಣಾಂಶದ ಛಾಯೆ ಆಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ.

ಉಭಯ ಕ್ಷೇಪನ : $f:A\to B$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅಂತಃಕ್ಷೇಪನವೂ ಮತ್ತು ಪರಿಕ್ಷೇಪನವೂ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಉಭಯಕ್ಷೇಪನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $A=\{x,y,z\}$ ಮತ್ತು $B=\{0,1,2\}$ಆಗಿರಲಿ. $f:A\to B$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x)=0, f(y)=1, f(z)=2$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದಾಗ f ಉತ್ಪನ್ನವು ಒಂದು ಉಭಯಕ್ಷೇಪನವಾಗುವುದು. ಕಾರಣ A ನ ಗಣಾಂಶಗಳು B ನಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗಣಾಂಶಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ, ಮತ್ತು f ನ ಬಿಂಬಗಣವು B ಆಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನ : $f:A\to B$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಉಭಯಕ್ಷೇಪನವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, f ನ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f^{-1}:B\to A$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ : (1) $f:R\to R$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x)=x^3$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ ಇದು ಒಂದು ಉಭಯಕ್ಷೇಪನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $f^{-1}:R\to R$ ಅನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

(2) $f:R\to R$ ಅನ್ನು $f(x)=2x-3$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, f^{-1} ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$f(x)=y$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಇದರಿಂದ $x=f^{-1}(y)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $y=2x-3$ ಅಥವಾ $x=\dfrac{3+y}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ $f^{-1}(y)=\dfrac{3+y}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{3+x}{2}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗವುದು.

(3) $f: R \to R$ ಅನ್ನು $f(x) = x^2 - 4$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, $f^{-1}(12)$ ಮತ್ತು $f^{-1}(5)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $f(x) = y \Rightarrow y = x^2 - 4$ ಅಥವಾ $x = \pm\sqrt{y+4}$

ಅಂದರೆ $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x+4}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $f^{-1}(12) = \{-4, 4\}$ ಮತ್ತು $f^{-1}(15) = \{-3, 3\}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಗುಣಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನ : f ಉತ್ಪನ್ನವು A ಗಣದಿಂದ B ಗಣಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸಲಿ, g ಉತ್ಪನ್ನವು B ಯಿಂದ C ಗಣಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸಲಿ. ಆಗ f ಮತ್ತು g ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು gof ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಉತ್ಪನ್ನವು A ಗಣದಿಂದ C ಗಣಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ.

$(gof)(x) = gf(x)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ (1) : R ಎಂಬುದು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯ ಗಣವಾಗಿದ್ದು, $f: R \to R$ ಅನ್ನು $f(x) = 3x - 1$ ಮತ್ತು $g: R \to R$ ಅನ್ನು $g(x) = 5x^2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $(gof)(x)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $(gof)(x) = g[f(x)]$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $(gof)(x) = g(3x-1) = 5(3x-1)^2 = 45x^2 - 30x + 5$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ (2) : $f: R \to R$ ಅನ್ನು $f(x) = 2x + 7$ ಎಂದು $g: R \to R$ ಅನ್ನು $g(x) = x^2 - 2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $(fog)(x)$ ಮತ್ತು $(gof)(x)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(fog)(x) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 7 = 2x^2 + 3$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(ii) $(gof)(x) = g(2x+7) = (2x+7)^2 - 2 = 4x^2 + 49 + 28x - 2$

$$= 4x^2 + 28x + 47 .$$

ಅಭ್ಯಾಸ - 8

1. $A=\{0,1\}, B=\{5,6,7\}$ ಆದರೆ $A\times B$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $A=\{2,3\}, B=\{a,b\}$ ಮತ್ತು $C=\{4,5\}$ ಆದಾಗ $(A\times B)\cap(A\times C)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $A=\left\{x|x^2-5x+6=0\right\}, B=\{2,4\}$ ಮತ್ತು $C=\{4,5\}$ ಆದಾಗ $(A-B)\times(B-C)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $A=\{a,b\},\ B=\{1,2,3,4,5\}$ ಮತ್ತು $C=\{3,5,7,9\}$ ಆದಾಗ $(A\times B)\cap(A\times C)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $f:R\rightarrow R$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x)=2x+5$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದಾಗ f ಏಕ -ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

6. $f:R\rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x)=x^2-3x+5$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, $f^{-1}(3)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $f:R\rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x)=x^3+5$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $f^{-1}(x)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $f:R\rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x)=2x-3$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $f^{-1}(7)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $f:R\rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x)=x^2-3x+2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $(fof)(x)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $f:R\rightarrow R$ ಮತ್ತು $g:R\rightarrow R$ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು $f(x)=x^2+x+1$ ಮತ್ತು $g(x)=2x-1$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ (i) $(fog)(x)$, (ii) $(fof)(2)$, (iii) $(gog)(3)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಉತ್ಪನ್ನ $f:R\rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x)=2x+1$ ಎಂದು $g:R\rightarrow R$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $g(x)=x^2-2$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $(gof)(x)$ ಮತ್ತು $(fog)(x)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $f:R\rightarrow R$ ಅನ್ನು $f(x)=2x-3$ ಎಂದು $g:R\rightarrow R$ ಅನ್ನು $g(x)=x^2+5$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸದರೆ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(gof)(x)$ (ii) $(gog)(x)$ (iii) $(fog)(x-1)$ (iv) $(fog)(x+1)$

8.4 ವಿವಿಧ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

1. *ಬೈಜಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ :*

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+.....+a_{n-1}x+a_n, g(x)=x^4-1$$

ಮತ್ತು $h(x)=x^2+2x+1$ ಈ ರೀತಿಯ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬೈಜಿಕ (ಅಲ್ಜಿಬ್ರಾಯಿಕ್) ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2. *ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ :* sin x, cos x, tan x, sec x, cosec x, cot x ಇವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3. *ಘಾತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ :* ಈ ಕೆಳಗಿನ e^x ನ್ನು ಬಳಸಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಘಾತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ :

(i) $\operatorname{sech} x=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

(ii) $\operatorname{cosech} x=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$

(iii) $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

(iv) $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

(v) $\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(vi) $\coth x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

4. *ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು :*

(1) $x = \sin y$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು $-1 \le x \le 1$ ಆದಾಗ $y = \sin^{-1} x$ ಅನ್ನು sine ನ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

(2) $x = \cos y$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $0 \le y \le \pi$ ಮತ್ತು $-1 \le x \le 1$ ಆದಾಗ $y = \cos^{-1} x$ ಅನ್ನು cosine ನ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

(3) $x = \tan y$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು $-\infty < x < \infty$ ಆದಾಗ $y = \tan^{-1} x$ ಅನ್ನು tangent ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಡೊಮೇನ್ ಮತ್ತು ಬಿಂಬ ಗಣಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಉಭಯಕ್ಷೇಪನ ಉತ್ಪನ್ನ	ಡೊಮೇನ್	ಬಿಂಬಗಣ
$y = \sin^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \tan^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

ಇದೇ ರೀತಿ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

5. *ಲಾಗರಿದಮೀಯ (ಪ್ರತಿಘಾತೀಯ) ಉತ್ಪನ್ನ :*

$f(x) = \log_e x$ ಅನ್ನು ಲಾಗರಿದಮೀಯ (ಪ್ರತಿಘಾತೀಯ) ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $x > 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

6. *ಪ್ರಮಿತೀಯ ಪ್ಯಾರಾಮೆಟ್ರಿಕ್ ಉತ್ಪನ್ನ :* ಯಾವುದೇ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಚರಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಚರ t ಅಥವಾ θ ಗಳಿಂದ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : (i) $y^2 = 4ax$ ಎನ್ನುವುದು ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾದ ಸಮೀಕರಣ. $x = at^2, y = 2at$ ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ಯಾರಾಬೊಲಾದ ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

(ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಇದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣ ; ಇದರ ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು $x=a\cos\theta$ ಮತ್ತು $y=b\sin\theta$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(iii) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ಇದು ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಸಮೀಕರಣ.

ಇದರ ಪ್ರಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು $x=a\cosh t, y=b\sinh t$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

7. *ನಿರಪೇಕ್ಷ ಮೌಲ್ಯ (ಅನೃಣ) ಉತ್ಪನ್ನಗಳು :*

$f(x)=|x|$ ಅನ್ನು ನಿರಪೇಕ್ಷ (ಅನೃಣ) ಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು :

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x>0 \text{ ಆದಾಗ} \\ 0, & x=0 \text{ ಆದಾಗ} \\ -x, & x<0 \text{ ಆದಾಗ} \end{cases}$$

$|x|$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಡೊಮೇನ್ $=R$ ಮತ್ತು ಬಿಂಬಗಣ $=R^+\cup\{0\}$

8. ಗರಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಉತ್ಪನ್ನ (Greatest Ingteger Function) :

$f(x)=[x]$ ಅನ್ನು ಮಹಾಪೂರ್ಣಾಂಕ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. ಇದು x ಗೆ ಸಮನಾಗಿ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : (i) $[3]=3$ (ii) $[4.23]=4$

(iii) $[-3.5]=-4$ (iv) $[-4]=-4$

ಗಮನಿಸಿ : ಈ ಮೇಲಿನ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಪ್ರಮತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಾದ $x=a\cosh t, yb=\sinh t$ ಗಳಲ್ಲಿ $a=b=1$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಬರುವ $x=\cosh t$, $x=\sinh t$ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x^2-y^2=1$ ಎಂಬ ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ cosh ಮತ್ತು sinh ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು "***ಹೈಪರ್‌ಬಾಲಿಕ್***" ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ 9

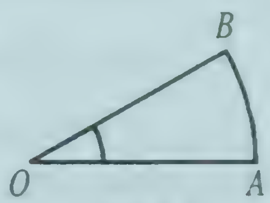
ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

9.1 ಪೀಠಿಕೆ

'ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ' ಪದದ ಅರ್ಥ ತ್ರಿಕೋಣದ ಅಳತೆ. ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಅಂದರೆ ಆದರ 6 ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು (3 ಭುಜಗಳು, 3 ಕೋನಗಳು) ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ. ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಮಿತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಲು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಜಾನ್ ಬರ್ನೌಲಿ, ಲಿಯೊನ್ಹಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್, ಫುರಿಯರ್, ಗೌಸ್, ಡಿಮೋವರ್ ಮುಂತಾದವರು ಈ ಶಾಖೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಕಾರಣಕರ್ತೃಗಳಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಲಂಬಕೋನದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಳೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಆದರೆ ಇದು ಅಷ್ಟು ಅನುಕೂಲವಾದ ಅಳತೆಯ ಮಾನವಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಕೆಲವು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಮಾನ ಪದ್ಧತಿಗಳು ಜಾರಿಗೆ ಬಂದವು.

9.1.1 ಕೋನ ಮತ್ತು ಕೋನಮಾನ

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಸ್ಥಿರ ಸ್ಥಾನ OA ಯಿಂದ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ O ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OB ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೊಂದಲಿ. ಹೀಗೆ ಸರಳರೇಖೆ OA ಯಿಂದ OBಗೆ Oನ ಸುತ್ತಲೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಅದು $\angle AOB$ ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 9.1).



ಚಿತ್ರ 9.1

ಹೀಗೆ ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ಪುನಃ OA ಗೆ ಮರಳುವಾಗ ಅದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನು ಕೋನಮಾನದ ಮೂರು ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

9.1.2 ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿ

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು 90 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "ಡಿಗ್ರಿ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು 60 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಇಂಥ ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "ಮಿನಿಟು" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತೆ ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಒಂದು ಮಿನಿಟನ್ನು 60 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಇಂಥ ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "ಸೆಕೆಂಡ್" ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

x ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು x° ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ; y ಮಿನಿಟುಗಳನ್ನು y' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ; ಮತ್ತು z ಸೆಕೆಂಡುಗಳನ್ನು z'' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪದ್ಧತಿಯು ಬಹಳ ಕಾಲದಿಂದ ಪ್ರಚಲಿತವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ 60 ಮತ್ತು 90ರ ಗುಣಕಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಇವು ಅಷ್ಟು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿಲ್ಲ. ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತೀಯ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಡಿಗ್ರಿ ಮಿನೀಟ್ ಮತ್ತು ಸೆಕೆಂಡುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಂಶ, ಕಲಾ ಮತ್ತು ವಿಕಲಾ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು.

9.1.3 ಶತಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ

ಈ ಪದ್ಧತಿಯು ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆ. ಇದರಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವನ್ನು 100 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "ಗ್ರೇಡ್" ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. ಒಂದು ಗ್ರೇಡ್‌ನ್ನು ಪುನಃ 100 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "ಮಿನಿಟು" ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಒಂದು ಮಿನಿಟನ್ನು 100 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಒಂದು "ಸೆಕೆಂಡ್" ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

1^g, $1'$, $1''$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ಗ್ರೇಡ್, ಒಂದು ಮಿನಿಟು ಮತ್ತು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ ಈ ಪದ್ಧತಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲ.

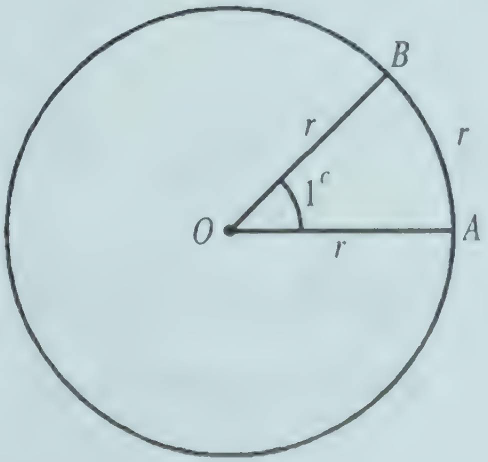
ಸೂಚನೆ : $90^\circ = 100^g$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಒಂದು ಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಉದಾ : $60^\circ = 66\frac{2}{3}^g$.

9.1.4 ರೇಡಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿ

ಈ ಮೂರನೇ ಪದ್ಧತಿಯು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ಕೋನಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿದೆ.

ರೇಡಿಯನ್‌ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : r ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿ AB ಕಂಸವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ AB ಕಂಸವು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ AOB ಕೋನದ ಮಾನವನ್ನು ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 1^c ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\angle AOB = 1$ ರೇಡಿಯನ್ $= 1^c$



ಚಿತ್ರ 9.2

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟೇ ಉದ್ದವಿರುವ ಅದರ ಕಂಸವು ಆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಕೋನವನ್ನು ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಳತೆಯ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವಾಗ ಆ ಅಳತೆಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ರೇಡಿಯನ್ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಕೋನ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದು.

9.1.5 ವೃತ್ತದ ಕಂಸ

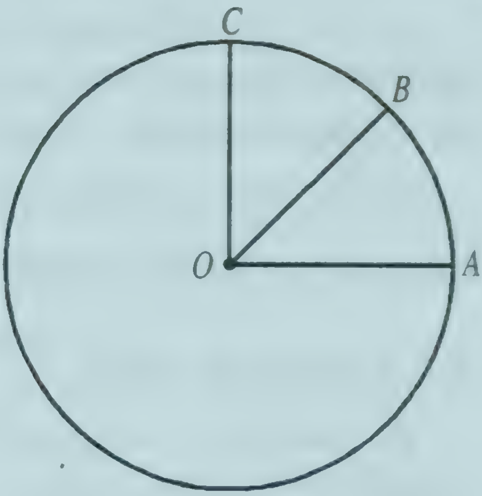
ಸಾಧನೆ : ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು O ಆಗಿದ್ದು ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಎಂಬುದಿರಲಿ. ಆ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕಂಸ AB ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.3).

ಆದ್ದರಿಂದ, ರೇಡಿಯನ್ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ $\angle AOB = 1^c$.

$\angle AOC$ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರು ವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

ಕಂಸ $AC = \frac{1}{4}$ (ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ)

$$= \frac{1}{4}[2\pi r]$$



ಚಿತ್ರ 9.3

ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಕಂಸಗಳು ಅವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \frac{\text{ಕಂಸ } AB}{\text{ಕಂಸ } AC} = \frac{\angle AOB}{\angle AOC}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{r}{\left(\frac{1}{4}\right)2\pi r} = \frac{1^c}{90^\circ}$ ಅಥವಾ $\frac{2}{\pi} = \frac{1^c}{90^\circ}$ ಅಥವಾ $\pi^c = 180^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ, $1^c = \frac{180^\circ}{\pi} =$ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ

ಅಂದರೆ, ರೇಡಿಯನ್ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಸೂಚನೆ :

(i) $1^c = \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3.1416} = 57°17'45''$

(ii) π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು 180°ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಈ ಸೂತ್ರವು ರೇಡಿಯನ್ ಮತ್ತು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಮಾನಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ.

9.1.6 ವೃತ್ತದ ಕಂಸ

ಪ್ರಮೇಯ 2 : ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕಂಸವು s ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಅದು θ ರೇಡಿಯನ್ ಕೋನವನ್ನು r ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದರೆ, ಆಗ $s = r\theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ :

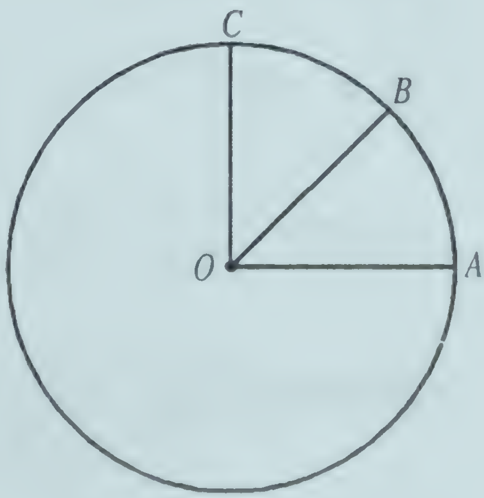
ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವು O ಆಗಿರಲಿ. ಹಾಗೂ, $\angle AOB = \theta^c$ ಮತ್ತು ಕಂಸ $AB = s$ ಆಗಿರಲಿ.

AC ಎಂಬ ಕಂಸವು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವಂತೆ C ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 9.4). ಈಗ $AC = r$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle AOC = 1^c$. ಕಂಸಗಳು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{\text{ಕಂಸ } AB}{\text{ಕಂಸ } AC} = \frac{\angle AOB}{\angle AOC}$$

ಅಥವಾ

$$\frac{s}{r} = \frac{\theta^c}{1^c} \quad \therefore \quad s = r\theta$$



ಚಿತ್ರ 9.4

9.1.7 ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ಪ್ರಮೇಯ 3 : ಒಂದು ವೃತ್ತಖಂಡವು θ^c ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $\frac{1}{2}r^2\theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಇಲ್ಲಿ r ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ).

ಸಾಧನೆ : ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು O ಹಾಗೂ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಆಗಿರಲಿ.

$\angle AOB = \theta^c$ ಮತ್ತು $\angle AOC = 90° = \frac{\pi^c}{2}$ ಆಗಿರುವಂತೆ B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 9.5).

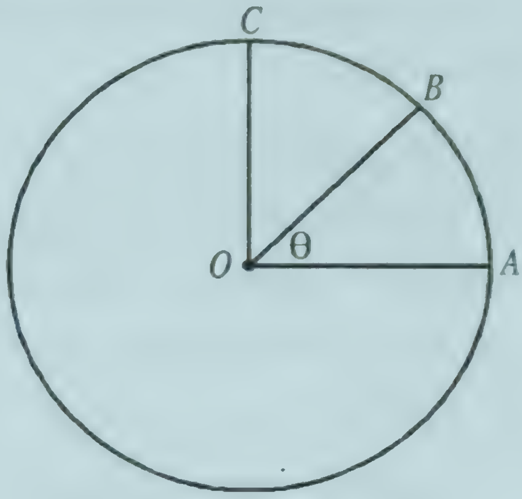
ಇಲ್ಲಿ AB ಕಂಸವು θ^c ಕೋನವನ್ನು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಕೋನದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{AOB \text{ ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{AOC \text{ ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}} = \frac{\theta^c}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^c}$$

ಅಥವಾ $\frac{AOB \text{ ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ}}{\frac{1}{4}(\pi r^2)} = \left(\frac{\theta}{\pi/2}\right)$

$\therefore$ AOB ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$= \frac{1}{2} r^2 \theta$



ಚಿತ್ರ 9.5

ಸೂಚನೆ : $s = r\theta$ ಮತ್ತು $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ θ ರೇಡಿಯನ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

(i) 135°, (ii) 270°, (iii) 315°, (iv) 80°

(i) $\pi^c = 180° \quad \therefore \quad 135° = \frac{135}{180} \times \pi = \frac{3\pi^c}{4}$

(ii) $270° = \frac{\pi \times 270}{180} = \frac{3\pi^c}{2}$

(iii) $315° = \frac{\pi \times 315}{180} = \frac{7\pi^c}{4}$

(iv) $80° = \frac{80 \times \pi}{180} = \frac{4\pi^c}{9}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳನ್ನು ಷಷ್ಠ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

(i) $\frac{2\pi}{3}$, (ii) $\frac{7\pi}{12}$, (iii) $\frac{4\pi}{3}$

(i) $$\frac{2\pi^c}{3} = \frac{180° \times 2\frac{\pi}{3}}{\pi} = 120°$$

(ii) $$\frac{7\pi^c}{12} = \frac{180° \times 7\frac{\pi}{12}}{\pi} = 105°$$

(iii) $$\frac{4\pi^c}{3} = \frac{180° \times 4\frac{\pi}{3}}{\pi} = 240°$$

3. 6 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತದ ಕಂಸವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 48 ಸೆ.ಮೀ. ಕಂಸವು ರಚಿಸಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಷಷ್ಠ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ = ಪರಿಧಿ = $2\pi r$

$= 2\pi \times 6 = 12\pi$ ಸೆ.ಮೀ.

ಇದನ್ನು ಕಂಸವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು $s = 12\pi$ ಸೆ.ಮೀ.

ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r = 48$ ಸೆ.ಮೀ.

ಈಗ, $s = r\theta$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದಾಗಿ

$$12\pi = 48(\theta) \text{ ಅಥವಾ } \theta = \frac{12\pi}{48}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi^c}{4} = 45°.$$

4. ಒಂದು ಕಂಸವು 50° ಕೋನವನ್ನು 36 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೊದಲು, ಕೋನ θ ವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕು

ದತ್ತ ಕೋನ, $50^\circ = \frac{5\pi^c}{18}$

$$\therefore \qquad A = \frac{1}{2}(36)^2\left(\frac{5\pi}{18}\right)$$

$A = 180\pi$ ಚದರ ಸೆ.ಮೀ.

5. ಒಂದು ರೈಲು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 1/2 ಕಿ.ಮೀ. ಅದು ಘಂಟೆಗೆ 20 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. 10 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ರೈಲು ಎಷ್ಟು ಕೋನದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $r = \frac{1}{2}$ ಕಿ.ಮೀ.; 1 ಘಂಟೆ (ಅಂದರೆ 3600 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ) ಚಲಿಸಿರುವ ದೂರ 20 ಕಿ.ಮೀ.

ಆದ್ದರಿಂದ 10 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಚಲಿಸಿರುವ ದೂರ = $\frac{20\times10}{3600} = \frac{1}{18}$ ಕಿ.ಮೀ.

ಈಗ, $s = r\theta$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡಾಗ

$\frac{1}{18} = \frac{1}{2}\theta$ ಅಥವಾ $\theta = \frac{1^c}{9}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಡಿಗ್ರಿಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$\theta = \frac{1}{9}\times\frac{180}{\pi} = \frac{20^\circ}{\pi} = \frac{20}{3.1416} = 6^\circ 21' 58''$ (ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ).

6. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಷಷ್ಠಂತ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿನ ಅತೀ ಕಡಿಮೆ ಕೋನ ಮತ್ತು ರೇಡಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿನ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕೋನಗಳು 60 : π ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಷಷ್ಠಂಶದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳು

$a-d, a, a+d$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad a-d+a+a+d = 180^\circ$ ಅಥವಾ $3a = 180^\circ$ ಅಥವಾ $a = 60^\circ$

ಈ ಮೂರು ಕೋನಗಳು $(60-d)^\circ, 60^\circ, (60+d)^\circ$

ಅತೀ ಕಡಿಮೆ ಕೋನ $(60-d)^\circ$.

ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕೋನ $(60+d)^\circ$. ಇದನ್ನು ರೇಡಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ.

$$(60+d)\times\frac{\pi}{180}$$

$$\therefore \quad \frac{60-d}{(60+d)\times\frac{\pi}{180}}=\frac{60}{\pi}$$

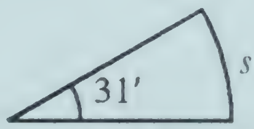
$3(60-d)=60+d$ ಅಥವಾ $d=30^\circ$

$\therefore$ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು, 30°, 60°, 90°.

7. ಚಂದ್ರನು ಭೂಮಿಯಿಂದ 2,40,000 ಮೈಲು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಚಂದ್ರನ ವ್ಯಾಸವು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಣ್ಣಿನಲ್ಲಿ 31' ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವಾದಾದರೆ, ಚಂದ್ರನ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ?

ಚಂದ್ರನ ವ್ಯಾಸವು s ಆಗಿರಲಿ. $\theta=31'$ $r=2,40,000$ θ ವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$\theta=31'=\left(\frac{31}{60}\times\frac{\pi}{180}\right)^c$$



$s=r\theta$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ.

$$s=2,40,000\times\frac{31}{60}\times\frac{\pi}{180}$$

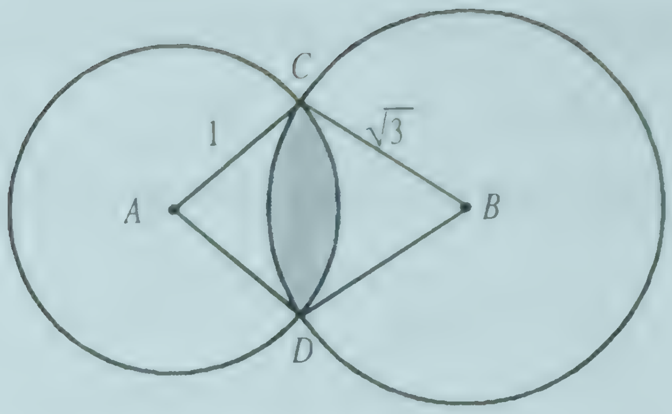
$s=2165$ ಮೈಲುಗಳು = ಚಂದ್ರನ ವ್ಯಾಸ.

8. ಎರಡು ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯವು 1 ಮತ್ತು $\sqrt{3}$ ಸೆ.ಮೀ. ಇದೆ. ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು 2 ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದರೆ. ಈ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ACD ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + BCD ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$-ACBD$ ಚತುರ್ಭಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ... (1)



ΔABC ಯಲ್ಲಿ $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$4 = 1+3 \qquad \therefore \qquad LC = 90^\circ$

$\cos\angle ACB = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \angle CAB = 60^\circ \qquad \therefore \quad \angle CBA = 30^\circ$

$\therefore \quad \angle CAD = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \equiv \frac{2\pi^c}{3}$

$\therefore$ ACD ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}(1)^2 \; \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ ... (2)

$[\because A = \frac{1}{2} r^2 \theta]$

$\angle CBA = 30^\circ$ ಆದುದರಿಂದ $\angle CBD = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

BCD ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ... (3)

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 2\,(\Delta\, ACB$ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ$)$

$= 2\,(\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ... (4)

(1), (2), (3) ಮತ್ತು (4) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ನಡುವಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$

9. 20 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಗಡಿಯಾರದ ಮಿನಿಟು ಮುಳ್ಳು ಮತ್ತು ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳು ಕ್ರಮಿಸುವ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಿನಿಟು ಮುಳ್ಳು 60 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ 360° ಕೋನವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ 1 ಮಿನಿಟಿನಲ್ಲಿ $= \dfrac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ ಕೋನವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ 20 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ $(20 \times 6)^\circ = 120^\circ$ ಕೋನವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳು 12 ಘಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ 360° ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

1 ಘಂಟೆಯಲ್ಲಿ $= \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

20 ನಿಮಿಷ $= \dfrac{20}{60} = \dfrac{1}{3}$ ಘಂಟೆ

$\therefore$ 20 ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳು $= \dfrac{1}{3} \times 30^\circ = 10^\circ$ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

10. (i) 4 ಘಂಟೆಗೆ 10 ನಿಮಿಷ ಇರುವಾಗ ಮತ್ತು

(ii) 4 ಘಂಟೆಯಾಗಿ 10 ನಿಮಿಷ ಇರುವಾಗ ಮಿನಿಟು ಮುಳ್ಳು ಮತ್ತು ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 4 ಘಂಟೆಗೆ 10 ನಿಮಿಷ ಇರುವಾಗ,

ಮಿನಿಟು ಮುಳ್ಳು 10ರಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಇದು 50 ನಿಮಿಷ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

1 ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ 6° ಕೋನವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ 50 ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ $= 50 \times 6^\circ = 300^\circ$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳು 3 ಘಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ $= 3 \times 30 = 90^\circ$ ಕ್ರಮಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳು 50 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ $= \dfrac{50}{60} \times 30 = 25^\circ$ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

ಒಟ್ಟಾಗಿ 4 ಘಂಟೆಗೆ 10 ನಿಮಿಷ ಇರುವಾಗ ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳು $= 90^\circ + 25^\circ = 115^\circ$ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಎರಡು ಮುಳ್ಳುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು $300^\circ - 115^\circ = 185^\circ$.

(ii) 4 ಘಂಟೆಯಾಗಿ 10 ನಿಮಿಷವಾದಾಗ,

ಮಿನಿಟುಮುಳ್ಳು $10\times6^\circ = 60^\circ$ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳು 4 ಘಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ $4\times30 = 120^\circ$ ಮತ್ತು ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳು 10 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ $\frac{10}{60}\times30 = 5^\circ$ ಕ್ರಮಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ಒಟ್ಟಾಗಿ $120 + 5 = 125^\circ$ ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಎರಡು ಮುಳ್ಳುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $125^\circ - 60^\circ = 65^\circ$.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

   (i) 140° (ii) 175° (iii) 245° (iv) -335° (v) 3540°

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಷಷ್ಟಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ :

   (i) $\frac{3\pi^c}{4}$ (ii) $10\pi^c$ (iii) 8^c (iv) $\frac{7\pi^c}{6}$ (v) $\frac{17\pi^c}{12}$

3. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದ ಎರಡು ಲಘುಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು $\frac{2}{5}\pi^c$ ತ್ರಿಕೋಣದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಡಿಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳು A.P.ಯಲ್ಲಿವೆ. ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕೋನವು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ. ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಕೋನವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.

5. 3 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತಾಕಾರವಾದ ತಂತಿಯನ್ನು ತುಂಡುಮಾಡಿ ಬಗ್ಗಿಸಿ, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕಂಸವನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 4 ಸೆ.ಮೀ. ಈ ಕಂಸವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.

6. ಮುಲ್ಕಿಯು ಮಂಗಳೂರಿನಿಂದ 64 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಎರಡು ಪಟ್ಟಣಗಳನ್ನು ಕಂಸಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಭೂಮಿಯ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ಷಷ್ಟಾಂಶ ಮಾನದಲ್ಲಿ (ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಭೂಮಿಯು ಗೋಲಾಕಾರವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6371 ಕಿ.ಮೀ. ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

7. 50 ಸೆ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಒಂದು ಲೋಲಕವು 15°ಯಷ್ಟು ದೂರಕ್ಕೆ ತೂಗಾಡುವುದು. ಅದರ ಕೊನೆಯು ರಚಿಸುವ ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಲೋಲಕವು ರಚಿಸುವ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಒಂದು ಕುದುರೆಯನ್ನು 8.23 ಮೀ. ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಬಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿಹಾಕಿದ್ದಾರೆ. ಕುದುರೆಯು ಚಲನೆಯಲ್ಲಿರುವಾಗ ಹಗ್ಗವು ಯಾವಾಗಲೂ ಬಿಗುವಾಗಿ ಇರುವುದು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ ಹಗ್ಗವು 70° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ ಕುದುರೆಯು ಎಷ್ಟು ದೂರ ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ ?

9. ಒಂದು ಚಕ್ರವು ಒಂದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ 45 ಸಲ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಚಕ್ರದ ಕಂಸವು 5 ರೇಡಿಯನ್ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಸಮಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ?

10. 3 ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಚಕ್ರವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 10ಸಲ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಅದರ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಕಂಸದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

11. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು $(0.2\pi)^c$ ಮತ್ತು $(0.7\pi)^c$. ಈ ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರನೇ ಕೋನವನ್ನು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶದಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle A = 52°$, $\angle B = \left(\frac{\pi}{8}\right)^c$, $\angle C$ ಯನ್ನು (i) ಷಷ್ಟ್ಯಂಶದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು (ii) ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಒಂದು ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು 231 sq. cm ಆಗಿದ್ದು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 21 ಸೆ.ಮೀ. ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು 2 : 3 : 5 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ. ಅದರ ಕೋನಗಳನ್ನು ರೇಡಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಗಡಿಯಾರವು 10.40 ತೋರಿಸುವಾಗ ಮಿನಿಟು ಮುಳ್ಳು ಮತ್ತು ಘಂಟೆ ಮುಳ್ಳುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. ಒಂದು ರೈಲು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಘಂಟೆಗೆ 8 ಮೈಲು ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 2500 ಅಡಿ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ರೈಲು ಎಷ್ಟು ಕೋನದಲ್ಲಿ ತಿರುಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿ.

17. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯನ್ನು 4 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದೆ. ಇವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಿನ ಭಾಗವು ಅತೀ ಕಡಿಮೆ ಭಾಗಕ್ಕಿಂತ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಿದೆ. ಈ ಪ್ರತಿ ಭಾಗವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

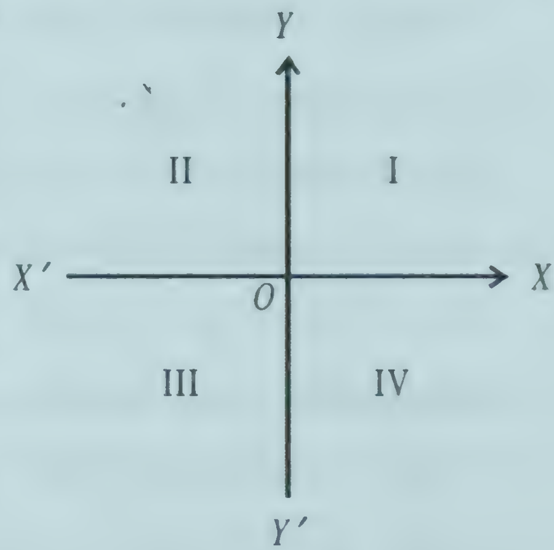
18. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಅರ್ಧ ಪರಿಧಿಯು ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತಖಂಡದ ಸುತ್ತಳತೆಯಷ್ಟಿದೆ. ಈ ವೃತ್ತ ಖಂಡವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಕೋನವು 65°ಗೆ ಸಮೀಪವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. ಒಂದು ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು A ಆಗಿದ್ದು ಸುತ್ತಳತೆ p ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು $2r^2 - pr + 2A = 0$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9.2 ಪಾದಗಳು

ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಅದರಲ್ಲಿ $X'OX$ ಒಂದು ಮಧ್ಯ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. O ಅದರ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. $Y'OY$ ಯು $X'OX$ಗೆ ಲಂಬರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. ಹೀಗೆ ಸಮತಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಲಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 9.6).

ಸಮತಲದ ಭಾಗಗಳಾದ XOY', YOX', $X'OY'$ ಮತ್ತು $Y'OX$ ಗಳನ್ನು ಒಂದನೇಪಾದ (I-), ಎರಡನೇಪಾದ (II-), ಮೂರನೇಪಾದ (III-) ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇಪಾದ (IV-) ಎಂದು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. $X'OX$ ಮತ್ತು $Y'OY$ ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಂದನೇಪಾದದಲ್ಲಿ (I-ಪಾದದಲ್ಲಿ) ಯಾವುದೇ ಕೋನವು 0° ಯಿಂದ 90° ವರೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ; II-ಪಾದದಲ್ಲಿ 90° ಯಿಂದ 180° ವರೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ; III-ಪಾದದಲ್ಲಿ 180° ಯಿಂದ 270° ವರೆಗೆ ಮತ್ತು IV-ಪಾದದಲ್ಲಿ 270° ಯಿಂದ 360° ವರೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ.

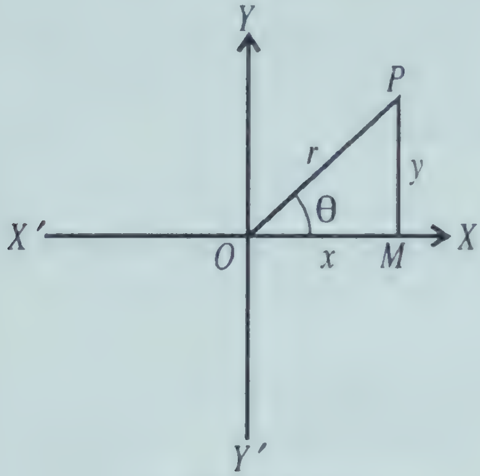


ಚಿತ್ರ 9.6

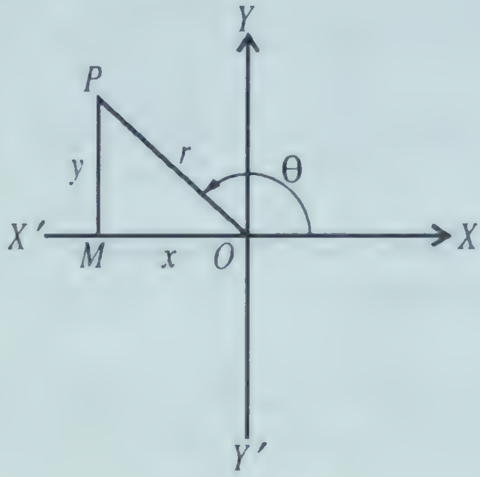
9.2.2 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಈ ಕೆಳಗೆ (ಚಿತ್ರ 9.7-9.10) ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ OP ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು θ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಬಹುದು.

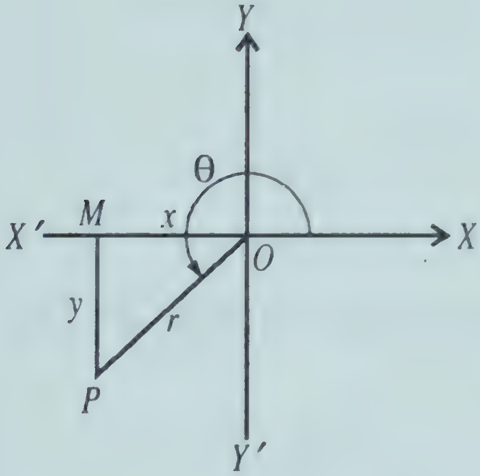
OP ಯು ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ. $OP = r$ ಎಂದಿರಲಿ. OPಯು ಸದಾ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದು. P ಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y) ಆಗಿರಲಿ. PMನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ I-ಪಾದದಲ್ಲಿ θ $(0 < \theta < 90°)$ ಎಂಬ ಕೋನಕ್ಕೆ PM (y-ನಿರ್ದೇಶಕ) ಎದುರು ಭುಜವೆಂದೂ ಮತ್ತು OM (x-ನಿರ್ದೇಶಕ) ಪಕ್ಕದ ಭುಜವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. OPಯು ಕರ್ಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



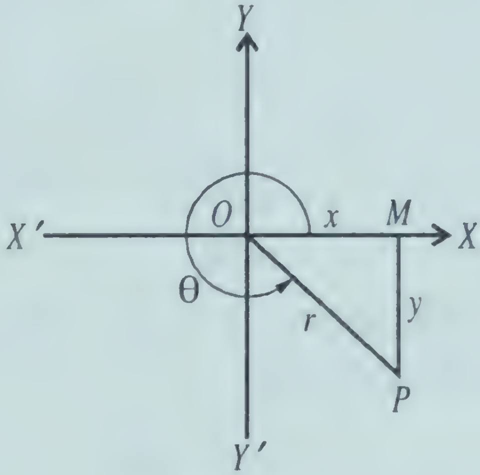
ಚಿತ್ರ 9.7



ಚಿತ್ರ 9.8



ಚಿತ್ರ 9.9



ಚಿತ್ರ 9.10

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಸರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ θ ಕೋನವು ಯಾವುದೇ ಪಾದದಲ್ಲಿರಬಹುದು.

$$\frac{MP}{OP} = \frac{y}{r} = \text{sine}\,\theta \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \sin\theta$$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{x}{r} = \text{cosine}\,\theta \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \cos\theta$$

$$\frac{MP}{OM} = \frac{y}{x} = \text{tangent}\,\theta \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \tan\theta$$

$$\frac{OP}{MP} = \frac{r}{y} = \text{cosecant}\,\theta \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \text{cosec}\,\theta$$

$$\frac{OP}{OM} = \frac{r}{x} = \text{secant}\,\theta \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \sec\theta$$

ಮತ್ತು $\frac{OM}{MP} = \frac{x}{y} = \text{cotangent}\,\theta$ ಅಥವಾ $\cot\theta$

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುತ್ತೇವೆ.

(i) $\sin\theta\,\text{cosec}\,\theta = 1$ ಅಥವಾ $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$.

(ii) $\cos\theta\sec\theta = 1$ ಅಥವಾ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

(iii) $\tan\theta\cot\theta = 1$ ಅಥವಾ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

(iv) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

ವಿಶೇಷವಾಗಿ, θ ಕೋನ 1ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅಂದರೆ θ ಒಂದು ಲಘುಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ

(i) $\sin\theta = \frac{\text{ಎದುರು ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$ (ii) $\cos\theta = \frac{\text{ಪಕ್ಕದ ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}$

(iii) $\tan\theta = \frac{\text{ಎದುರು ಭುಜ}}{\text{ಪಕ್ಕದ ಭುಜ}}$ (iv) $\cot\theta = \frac{\text{ಪಕ್ಕದ ಭುಜ}}{\text{ಎದುರು ಭುಜ}}$

(v) $\sec\theta = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪಕ್ಕದ ಭುಜ}}$ (vi) $\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಎದುರು ಭುಜ}}$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : (i) $P(x, y)$ ಬಿಂದುವು x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $PM = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ; ಅಂದರೆ $y = 0$ ಮತ್ತು $\theta = 0°$. ಆದ್ದರಿಂದ, $\cot\theta$ ಮತ್ತು $\text{cosec}\,\theta$ಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದವು ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು "ಅವ್ಯಾಖ್ಯಾತ"ವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ಅಂತೆಯೇ, $P(x, y)$ ಬಿಂದುವು y-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $OM = x = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\theta = 90°$ ಆಗಿದ್ದು, $\tan\theta$ ಮತ್ತು $\sec\theta$ಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದವು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, $\tan 90°$ ಮತ್ತು $\sec 90°$ ಅವ್ಯಾಖ್ಯಾತವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, "ಮಿತಿ"ಯ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ

$$\lim_{\theta\to 0} \cot\theta = \infty \qquad \lim_{\theta\to 0} \text{cosec}\,\theta = \infty$$

$$\lim_{\theta\to 0} \tan\theta = \infty \qquad \lim_{\theta\to 0} \sec\theta = \infty$$

ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಇಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಗೊಂದಲ ಉಂಟಾಗಬಾರದೆಂಬ ಕಾರಣದಿಂದ "ಎಡಮಿತಿ" ಮತ್ತು "ಬಲಮಿತಿ"ಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಉದ್ದೇಶಪೂರ್ವಕ ವಾಗಿಯೇ ಪರಿಗಣಿಸಿಲ್ಲ!)

9.2.3 ಕೆಲವು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ OPM (ಚಿತ್ರ 9.7)ನಲ್ಲಿ

$$MP^2 + OM^2 = OP^2 \qquad \text{....} (1)$$

(1)ನ್ನು OP^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = 1$$

ಅಥವಾ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(1)ನ್ನು OM^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{MP^2}{OM^2} + 1 = \frac{OP^2}{OM^2}$$

ಅಥವಾ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$$\therefore \quad 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$$

3. $1+\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

(1)ನ್ನು MP^2ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$1+\frac{OM^2}{MP^2} = \frac{OP^2}{MP^2}$$

ಅಥವಾ $1+\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

ಗಮನಿಸಿ : (i) $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$; (ii) $(\sin\theta)^{-1} \neq \sin^{-1}\theta$;

(iii) $\sin^3\theta \equiv (\sin\theta)^3$; (iv) $\sin^{-1}\theta \neq \frac{1}{\sin\theta}$;

9.2.4 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು

I - ಪಾದ : ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.7) *OM, PM, OP* ಅಥವಾ *x, y, r* ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದುದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

II - ಪಾದ : ಎರಡನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.8) x - ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ cos θ, tan θ, cot θ, sec θ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. sin θ ಮತ್ತು cosec θ ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

III - ಪಾದ : ಎರಡನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.9) x ಮತ್ತು y ಎರಡೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ sin θ, cos θ, cosec θ, sec θ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ. tan θ ಮತ್ತು cot θ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

IV - ಪಾದ : ನಾಲ್ಕನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.10) y ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ sin θ, tan θ, cosec θ, cot θ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು cos θ ಹಾಗೂ sec θ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿವೆ.

ಸೂಚನೆ : ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಧನ ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ ಸ್ವಭಾವಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಂಡ **"ASTC - ನಿಯಮ"**ದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಮುಖ್ಯ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಾದ sin θ, cos θ ಮತ್ತು tan θಗಳ ಪೈಕಿ I-ಪಾದದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರೂ, II-ಪಾದದಲ್ಲಿ sin θ ಮಾತ್ರ, III-ಪಾದದಲ್ಲಿ tan θ ಮಾತ್ರ ಹಾಗೂ IV-ಪಾದದಲ್ಲಿ cos θ ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, III - ಪಾದದಲ್ಲಿ ($180° < \theta < 270$), $\tan\theta$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $\sin\theta$, $\cos\theta$ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=2\operatorname{cosec} A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{(1+\cos A)}{\sin A}=\dfrac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{(1+\cos A)\sin A}$

$$=\frac{\sin^2 A+(1+\cos^2 A+2\cos A)}{(1+\cos A)\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A)}{(1+\cos A)\sin A}$$

$$=\frac{1+1+2\cos A)}{(1+\cos A)\sin A} \qquad [\because \sin^2 A+\cos^2 A=1]$$

$$=\frac{2(1+\cos A)}{(1+\cos A)\sin A}=\frac{2}{\sin A}=2\left(\frac{1}{\sin A}\right)=2\operatorname{cosec} A$$

2. ಈ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

$\cos^6 A+\sin^6 A=1-\sin^2 A\cos^2 A$

ಈಗ, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \quad (\sin^2 A+\cos^2 A)^3=1^3$

$\therefore \quad (\sin^2 A)^3+(\cos^2 A)^3+3\sin^2 A\cos^2 A(\sin^2 A+\cos^2 A)=1$

ಅಥವಾ $\qquad \sin^6 A+\cos^6 A+3\sin^2 A\cos^2 A=1$

$[\because \sin^2 A+\cos^2 A=1]$

ಅಥವಾ $\sin^6 A+\cos^2 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$.

3. $x = r\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$y = r\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$

$z = r\cos\alpha\sin\beta$

$t = r\sin\alpha$ ಎಂದಾದರೆ $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (r^2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma + r^2\cos^2\alpha\cos^2\beta\sin^2\gamma)$$

$$+ r^2\cos^2\alpha\sin^2\beta + r^2\sin^2\alpha$$

$$= (r^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + r^2\cos^2\alpha\sin^2\beta) + r^2\sin^2\alpha$$

$$[\because \cos^2\beta + \sin^2\gamma = 1]$$

$$= r^2\cos^2\alpha[\cos^2\beta + \sin^2\beta] + r^2\sin^2\alpha$$

$$= r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha \qquad [\because \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1]$$

$$= r^2[\cos^2\alpha + \sin^2\alpha] \qquad [\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1]$$

$$= r^2.$$

4. $\tan^2\theta + \sec\theta = 5$ ಎಂದಾದರೆ $\cos\theta$ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$\tan^2\theta + \sec\theta = 5$

ಅಂದರೆ, $(\sec^2\theta - 1) + \sec\theta = 5$

ಅಥವಾ $\sec^2\theta + \sec\theta - 6 = 0$

ಈಗ, $\sec\theta = a$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು

$a^2 + a - 6 = 0$ ಅಥವಾ $(a+3)(a-2) = 0$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಗಳು $a = -3$ ಅಥವಾ $a = 2$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.
ಅಂದರೆ, $\sec\theta = -3$ ಅಥವಾ $\sec\theta = 2$.

ಆದರೆ, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \cos\theta = -\frac{1}{3} \text{ ಅಥವಾ } \cos\theta = \frac{1}{2}.$$

5. ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು sin θದ ಬೆಲೆಯ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sin\theta = x$ ಎಂದಿರಲಿ. ಚಿತ್ರ 9.12ರಲ್ಲಿ

$$\sin\theta = \frac{\text{ಎ. ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}}; \quad x = \frac{PM}{OP} \text{ ಅಥವಾ } \frac{x}{1} = \frac{PM}{OP}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $PM = x$ ಮತ್ತು $OP = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಿಂದ $OM = \sqrt{1-x^2}$. ಆದ್ದರಿಂದ

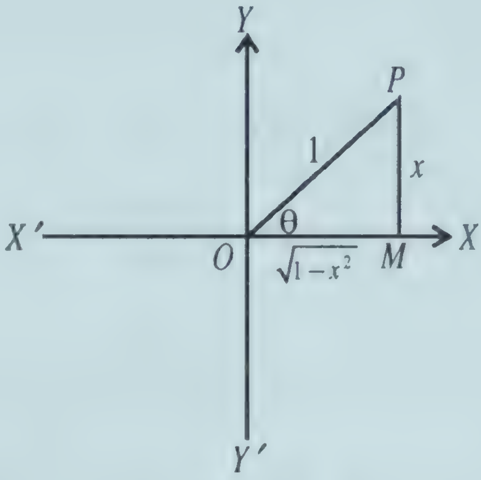
$$\cos\theta = \frac{\text{ಪ. ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ಎ. ಭುಜ}}{\text{ಪ. ಭುಜ}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪ. ಭುಜ}} = \frac{1}{x}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪ. ಭುಜ}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ಪ. ಭುಜ}}{\text{ಎ. ಭುಜ}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$



ಚಿತ್ರ 9.12

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ ಎಂಬುದು θ ಕೋನವು ಯಾವ ಪಾದದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದರ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. I-ಪಾದದಲ್ಲಾದರೆ, ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

6. $\tan\theta = \dfrac{2x(x+1)}{2x+1}$ ಎಂದಾದರೆ $\sin\theta$ ಮತ್ತು $\cos\theta$ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\tan\theta = \frac{\text{ಎ. ಭುಜ}}{\text{ಪ. ಭುಜ}} = \frac{2x(x+1)}{2x+1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎ. ಭುಜ = $2x(x+1)$ ಮತ್ತು ಪ. ಭುಜ = $2x+1$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad \text{ಕರ್ಣ} = \sqrt{(\text{ಎ. ಭುಜ})^2 + (\text{ಪ. ಭುಜ})^2}$$

$$= \sqrt{[2x(x+1)]^2 + (2x+1)^2}$$

$$= \sqrt{4x^2(x+1)^2 + (2x+1)^2}$$

$$= \sqrt{4x^2(x^2+1+2x) + 4x^2 + 1 + 4x}$$

$$= \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 8x^3 + 4x^2 + 1 + 4x}$$

$$= \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1 + 8x^3 + 4x + 4x^2}$$

ಅಂದರೆ, ಕರ್ಣ $= 2x^2 + 2x + 1$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\text{ಎ. ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \frac{2x(x+1)}{2x^2+2x+1}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ಪ. ಭುಜ}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+1}$$

7. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ θವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿರಿ.

$$\tan\theta + \sin\theta = m \qquad \text{... (1)}$$

$$\tan\theta - \sin\theta = n \qquad \text{... (2)}$$

ಸಮೀಕರಣಗಳಾದ (1) ಮತ್ತು (2) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ

$$2\tan\theta = m+n \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \tan\theta = \frac{m+n}{2}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂತೆಯೇ, (1)ರಲ್ಲಿ (2)ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ

$$\sin\theta = \frac{m-n}{2} \qquad \ldots (3)$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$\therefore \qquad \cos\theta = \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \frac{m-n}{m+n} \qquad \ldots (4)$$

ಈಗ, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ (3) ಮತ್ತು (4) ಬಳಸಿದಾಗ

$$\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 = 1$$

ಅಥವಾ $(m-n)^2(m+n)^2 + 4(m-n)^2 = 4(m+n)^2$

ಅಥವಾ $(m^2-n^2)^2 + 4(m^2+n^2-2mn) = 4(m^2+n^2+2mn)$

ಅಂದರೆ, $m^2 - n^2 = 16mn$

ಎಂಬ θದಿಂದ ಮುಕ್ತವಾದ ಸಮೀಕರಣವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

8. $\cot\theta = \frac{p}{q}$ ಎಂದಿದ್ದರೆ $\frac{p\cos\theta + q\sin\theta}{p\cos\theta - q\sin\theta}$ ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು p ಮತ್ತು q ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಿರಿ.

$$\frac{p\cos\theta + q\sin\theta}{p\cos\theta - q\sin\theta} = \frac{\frac{p\cos\theta}{\sin\theta} + q}{\frac{p\cos\theta}{\sin\theta} - q}$$

$$= \frac{p\cot\theta + q}{p\cot\theta - q} = \frac{p.\frac{p}{q} + q}{p.\frac{p}{q} - q} = \frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}.$$

9. $\frac{(\sec A - 1)\cos^2 A}{1+\sin A} + \frac{(\sin A - 1)\sec^2 A}{1+\sec A} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\text{LHS} = \frac{(\sec A - 1)\cos^2 A}{1+\sin A} + \frac{(\sin A - 1)\sec^2 A}{1+\sec A}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\cos A} - 1\right)\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}{1 + \sin A} + \frac{(\sin A - 1)\frac{1}{\cos^2 A}}{1 + \frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{(1 - \cos A)\cos A}{\sin^2 A(1 + \sin A)} + \frac{(\sin A - 1)}{\cos A(1 + \cos A)}$$

$$[\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = (1 - \cos A)(1 + \cos A)]$$

$$= \frac{\cos A}{(1 + \cos A)(1 + \sin A)} + \frac{\sin A - 1}{\cos A(1 + \cos A)}$$

$$= \frac{\cos A \cos A + (\sin A - 1)(1 + \sin A)}{\cos A(1 + \cos A)(1 + \sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A - 1}{\cos A(1 + \cos A)(1 + \sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \cos^2 A}{\cos A(1 + \cos A)(1 + \sin A)} = 0$$

$$[\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A\ ;\ \sin^2 A - 1 = -\cos^2 A]$$

10. $(1 - \tan\theta)^2 + (1 - \cot\theta)^2 = (\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

LHS $= 1 + \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 + \cot^2\theta - 2\cot\theta$

$$= \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta - 2(\tan\theta + \cot\theta)$$

$$[\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta\ ;\ 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta]$$

$$= \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta - 2\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta - 2\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right)$$

$$= \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta - 2\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)$$

$$= \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta - 2\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta = (\sec\theta - \text{cosec}\,\theta)^2 .$$

11. $12\cos ec^2\theta - 31\text{cosec}\,\theta + 32 = 0$ ಆದರೆ, $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ಅಥವಾ $\frac{3}{4}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$12\,\text{cosec}^2\theta - 31\text{cosec}\,\theta + 20 = 0$

i.e., $12\,\text{cosec}^2\theta - 16\text{cosec}\,\theta - 15\text{cosec}\,\theta + 20 = 0$

$4\,\text{cosec}\,\theta(3\,\text{cosec}\,\theta - 4) - 5(3\,\text{cosec}\,\theta - 4) = 0$

ಅಥವಾ $(3\text{cosec}\,\theta - 4)(4\,\text{cosec}\,\theta - 5) = 0$

$\therefore 3\text{cosec}\,\theta - 4 = 0$ ಅಥವಾ $4\text{cosec}\,\theta - 5 = 0$

i.e., $\text{cosec}\,\theta = \frac{4}{3}$ ಅಥವಾ $\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{4}$

$\therefore \sin\theta = \frac{3}{4}$ ಅಥವಾ $\sin\theta = \frac{4}{5}$

12. $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$ ಆದರೆ

$(x-a)(b-x) = (a-b)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$x - a = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - a$

$= a(1-\sin^2\theta) + b\sin^2\theta - a$

$= (b-a)\sin^2\theta$ ... (1)

$b - x = b - (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)$

$= b - (1-\sin^2\theta) - a\cos^2\theta$

$= (b-a)\cos^2\theta$ ... (2)

(1) × (2) ಮಾಡಿದಾಗ, $(x-a)(b-x)=(b-a)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$$=(a-b)^2\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2

ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

1. $(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A)=\sin^3 A+\cos^3 A$.

2. $\dfrac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$.

3. $\dfrac{1}{\cos A+\tan A}=\sin A\cos A$.

4. $\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}=\dfrac{\cot A-1}{\cot A+1}$.

5. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x-\cot x}-\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x+\cot x}$.

6. $\sec^6 A-\tan^6 A=1+3\sec^2 A\tan^2 A$.

7. $(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)=\dfrac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A}-\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\sec^2 A}$.

8. $\dfrac{\cot\theta\cos\theta}{\cot\theta+\cos\theta}=\dfrac{\cot\theta-\cos\theta}{\cot\theta\cos\theta}$.

9. $\cot^4 A+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^4 A-\operatorname{cosec}^2 A$.

10. $\dfrac{\tan A}{1-\cot A}+\dfrac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A\operatorname{cosec} A+1$.

11. $\dfrac{\tan x+\sec x-1}{\tan x-\sec x-1}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

12. $(1+\cot A-\operatorname{cosec} A)(1+\tan A+\sec A)=2$.

13. $2\sec^2 A - \sec^4 A - 2\text{cosec}^2 A + \text{cosec}^4 A = \cot^4 A - \tan^4 A$.

14. $\dfrac{(\sec A - 1)\cot^2 A}{1 + \sin A} + \dfrac{(\sin A - 1)\sec^2 A}{1 + \sec A} = 0$.

15. $\cos^2 A(3 - 4\cos^2 A)^2 + \sin^2 A(3 - 4\sin^2 A)^2 = 1$.

16. $\sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 y$.

17. $x = \cot\theta + \cos\theta$, $y = \cot\theta - \cos\theta$ ಎಂದಾದರೆ $x^2 - y^2 = 4\sqrt{xy}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

18. $x = \sec\theta + \tan\theta$ ಎಂದಾದರೆ $\sin\theta = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

19. $\tan\theta = x$ ಎಂದಾದರೆ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $\sin A = \dfrac{2x}{3}$ ಎಂದಾದರೆ ಉಳಿದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$ ಆದರೆ, $\dfrac{\text{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\text{cosec}^2\theta + \sec^2\theta}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$ ಆದರೆ $\tan\theta$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. $a\sec\theta - c\tan\theta = d$, $b\sec\theta + d\tan\theta = c$, ಆದರೆ $a^2 + b^2 = c^2 + a^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

24. $\sec^2\theta + \cos^2\theta$ ದ ಬೆಲೆಯು 2ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

25. $x = a\cos^3 t$ ಆದರೆ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

26. $\dfrac{\sec\theta - \text{cosec}\,\theta}{\sec\theta + \text{cosec}\,\theta} = \dfrac{\tan\theta - 1}{\tan\theta + 1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

27. $x = a\,r\sec\theta\sin\phi$, $y = b\,r\sec\theta\cos\phi$, $z = c\,r\tan\theta$ ಆದರೆ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=r^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

28. $\sec^4 A-\sec^2 A=\tan^4 A+\tan^2 A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

29. $(1+\tan\theta)^2+(1+\cot^2\theta)=(\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

30. $\tan A+\cot A=2$ ಆದರೆ $\sec A\operatorname{cosec} A=2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

31. $\sec^4 A(1-\sin^4 A)-\tan^2 A=\sec^2 A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

32. $\frac{\cot A+\tan B}{\cot B+\cot A}=\cot A\,.\,\tan B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

33. $\frac{\tan A}{1-\cot A}+\frac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A\operatorname{cosec} A+1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

34. $\frac{\cot A+\operatorname{cosec} A-1}{\cot A-\operatorname{cosec} A+1}=\frac{1+\cos A}{\sin A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

35. $\sqrt{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A}=\tan A+\cot A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

36. $\frac{\tan A}{\sec A-1}+\frac{\tan A}{\sec A+1}=2\operatorname{cosec} A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

37. $2(\tan\theta+\sec\theta)=3$ ಆದರೆ, $\sec\theta=\frac{13}{12}$ ಅಥವಾ $\tan\theta=\frac{5}{12}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

38. $2\sin^2\theta+5\cos\theta=4$ ಆದರೆ, $\cos\theta=\frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

39. $\sec\theta+\tan\theta=p$ ಆದರೆ, $\sec\theta, \tan\theta$ ಮತ್ತು $\sin\theta$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು p ಯ ಮೂಲಕ ಪಡೆಯಿರಿ.

40. $\tan A+\cot A=4$ ಆದರೆ, $\tan^4 A+\cot^4 A=194$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

41. $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ ಆದರೆ, $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

42. $\sin x+\sin^2 x=1$ ಆದರೆ, $\cos^2 x+\cos^4 x=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ

43. $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\left(\dfrac{1+\tan A}{1+\cot A}\right)^2.$

44. $\dfrac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\cot\theta-\tan\theta.$

45. $\dfrac{\tan\theta-\sin\theta}{\sin^3\theta}=\dfrac{\sec\theta}{1+\cos\theta}.$

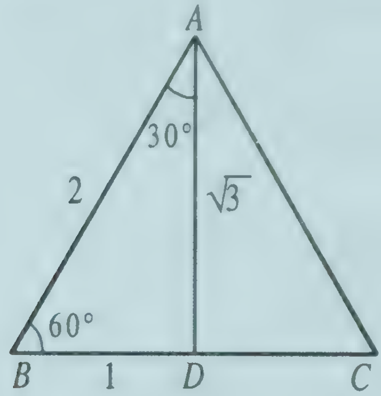
46. $\cot^2\theta\left[\dfrac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}\right]+\sec^2\theta\left[\dfrac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}\right]=0.$

9.3 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ನಾವೀಗ 0°, 30°, 45°, 60°, 90° ಇವುಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) sin 30°, cos 30°, tan 30° ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳು 2 ಮೂಲ ಮಾನಗಳಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.13).



ಚಿತ್ರ 9.13

ಅಂದರೆ, $AB = BC = AC = 2$

AD ಯು BCಗೆ ಲಂಬಾಗಿರಲಿ,

D ಯು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$BD = DC = 1$. ABD ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\angle BAD = 30°$, $\angle ADB = 90°$ ಹಾಗೂ $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 4 - 1 = 3$

ಅಥವಾ $AD = \sqrt{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ADB ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $\text{cosec}\,30° = 2$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cot 30° = \sqrt{3}$

(ii) ADB ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ, $\angle ABD = 60°$. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \therefore \sec 60° = 2$$

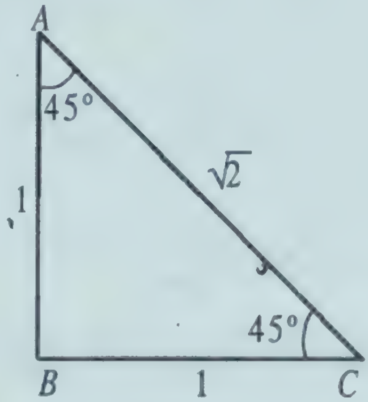
$$\tan 60° = \sqrt{3} \qquad \therefore \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(iii) $\sin 45°$, $\cos 45°$, $\tan 45°$ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಭುಜ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯನ್ನು (ಚಿತ್ರ 9.14) ಪರಿಗಣಿಸಿ. $AB = BC = 1$ ಆಗಿರಲಿ.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2\cdot$$

$\therefore \quad \angle A = \angle C = 45°$ ಮತ್ತು $AC = \sqrt{2}$ ಆದ್ದರಿಂದ



ಚಿತ್ರ 9.14

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \sec 45° = \sqrt{2}$$

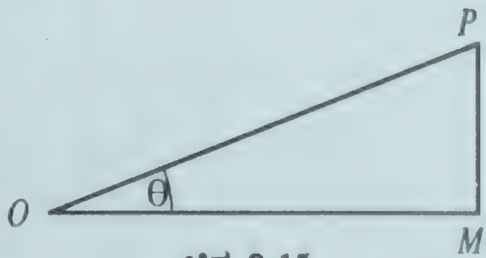
$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \therefore \quad \cot 45° = 1$$

(iv) $\sin 0°$, $\cos 0°$, $\tan 0°$ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

$\angle MOP = 0°$ ಆದಾಗ P ಯು M ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು.

OP ಯು OM ನಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗುವುದು. (ಚಿತ್ರ 9.15).

ಆದ್ದರಿಂದ $PM = 0$ ಮತ್ತು $OM = OP$ ಆಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ



ಚಿತ್ರ 9.15

$$\sin 0° = \frac{PM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0 \qquad \operatorname{cosec} 0° \to \infty$$

$$\cos 0° = \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1 \qquad \therefore \sec 0° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{PM}{OM} = \frac{0}{OP} = 0 \qquad \cot 0° \to \infty$$

(v) sin 90°, cos 90°, tan 90° ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ತ್ರಿಕೋಣ OMP ಯಲ್ಲಿ $\angle MOP = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle MOP = 90°$ ಆದಾಗ OP ಯು PM ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುವುದು. ಆಗ, $OM = 0$ ಆಗುವುದು ಮತ್ತು $OP = PM$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\sin 90° = \frac{PM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1 \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec} 90° = 1$$

$$\cos 90° = \frac{OM}{OP} = \frac{o}{OP} = 0 \qquad \therefore \quad \sec 90° \to \infty$$

$$\tan 90° = \frac{PM}{OM} \to \infty \qquad \therefore \quad \cot 90° = 0$$

ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $16\sin^3 30° + 8\cos^3 60° = 3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣ ಎಡಭಾಗ

$$\equiv 16\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{16}{8} + \frac{8}{8} = 2+1=3 \equiv \text{ಬಲಭಾಗ}$$

2. $3\tan^2 30° + 3\tan 45° + 3\tan^2 60° - 13 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\equiv 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 + 3(3) - 13 \equiv 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 + 3(3) - 13$$

$$2\left(\frac{1}{3}\right) + 3 + 3(3) - 13$$

$$13 - 13 = 0 \equiv$$

3. $\tan^2 45° - \cos^2 60° - x\sin 45° \cos 60° = 0$ ಆದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - x\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = 0 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad 1 - \frac{1}{4} - \frac{x}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{3}{4} - \frac{x}{2\sqrt{2}} = 0 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\left(3\operatorname{cosec}^2 60° + 2\cos 45°\right)x^2 - \left(3\tan^2 60°\right)x = 5\cos 90°$$

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 60^0 = \sqrt{3}, \cos 90^0 = 0$$

$$\therefore \left[3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2.1\right]x^2 - \left[4\left(\sqrt{3}\right)^2\right]x = 5\times 0$$

ಅಥವಾ $6x^2 - 12x = 0$ ಅಥವಾ $x^2 - 2x = 0$

i.e., $x(x-2) - 0 \quad \therefore x = 0$, $x = 2$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. (i) $4\cot^2\frac{\pi}{4} - \sec^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{6}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $\tan^2 30° + \tan^2 45° + \tan^2 60° = 4\frac{1}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(iii) $4\cos^3\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{6}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv) $\text{cosec}^2 45° \sec^2 30° \sin^2 90° \cos 60°$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

2 ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $x^2(2\tan^2 60° - \cos 90°) = 7\,\text{cosec}\,30° - (4\sec^2 45° + 9)\,x$

(ii) $(3\,\text{cosec}^2 60° + 2\cot 45°)\,x^2 - (4\tan^2 60°)\,x = 5\cos 90°$

(iii) $32\cos^2 45° + x\cos 60° \tan^2 45 - 16\cos^4 60° = 7$

(iv) $\cos\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{6} = \frac{\tan 45° \cot 30° \cos 0°}{x\sec\frac{\pi}{3}\sin 90°}$

(v) $x^2\sin^2 45° \cos 0° - 2x\sec 60° + 8\sin 30° + \cos 90° = 0$

3. (i) $\frac{4}{3}\sec^2 60° - \cos\sec^2 30° - \frac{3}{4}\tan^2 45° - 2\sin^2 60°$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) $\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}=\left(\frac{1+\cot 60^\circ}{1-\cot 60^\circ}\right)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(iii) $A=2B=3C=90^\circ$ ಆದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $\cos^2 A-\cot^2 B+\operatorname{cosec}^2 C$

(b) $\frac{\sin^3 A-\cos^2 B}{\tan^3 B+\cot^2 C}$

(iv) ಸರಳ ಗೊಳಿಸಿ $\frac{\sec 60^\circ \tan^2 45^\circ \cos^2 30^\circ \tan^2 30^\circ}{\sec 60^\circ \operatorname{cosec}^2 30^\circ-\sin 30^\circ \sin^2 60^\circ \tan 30^\circ}$

(v) x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

$$(2x-3)\left(2\tan^2 60^\circ-\cos 90^\circ\right)=x\tan^2 45^\circ-\sec^2 30^\circ-2$$

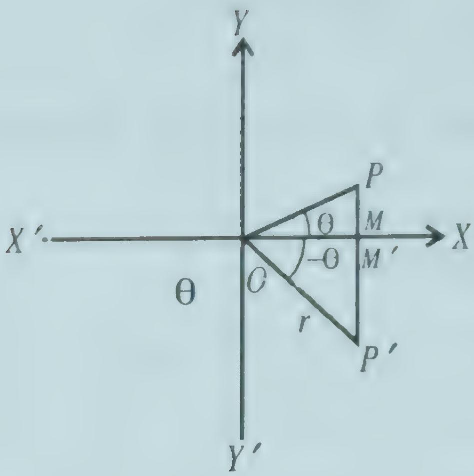
(vi) $\frac{x\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{6}\sec^2 \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{4}\cos^2 \frac{\pi}{3}} = \tan^2 \frac{\pi}{3}-\cot^2 \frac{\pi}{3}$ ಆದರೆ $24x=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9.4 ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು

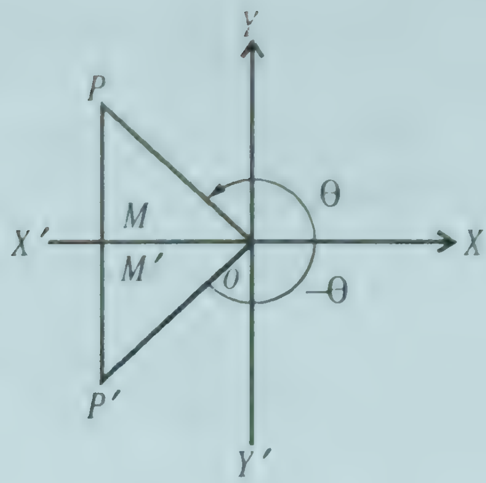
θ ಎಂಬ ಕೋನಕ್ಕೆ $-\theta, \frac{\pi}{2}\pm\theta, \pi\pm\theta$ ಮತ್ತು $2\pi\pm\theta$ ಇವುಗಳು ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು θ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಣ ರೇಖೆ OPಯು θ ಕೋನವನ್ನೂ OP^1 ಯು θ ಎಂಬ ಕೋನಕ್ಕೆ $-\theta, \frac{\pi}{2}\pm\theta, \pi\pm\theta$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಆಗ $OP = OP^1$

(i) ಕೋನ $(-\theta)$ ದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಚಿತ್ರ 9.18 - 9.21ಗಳಲ್ಲಿ θವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.18



ಚಿತ್ರ 9.19

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋಣಗಳಾದ OMP ಮತ್ತು OM^1P^1 ಸರ್ವಸಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ M ಮತ್ತು M^1 ಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವುವು.

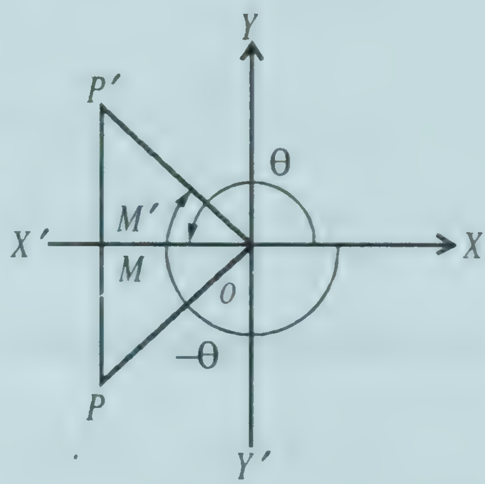
$\therefore \quad MP = -M^1 P^1, OM = OM^1$

ಮತ್ತು $OP = OP^1$

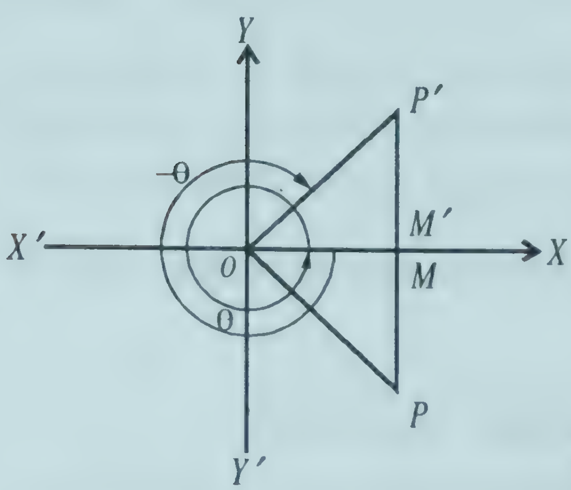
$\angle XOP = \angle MOP = \theta$

$\angle XOP = \angle M^1OP^1 = -\theta$

ಆಗಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 9.20



ಚಿತ್ರ 9.21

$$\therefore \quad \sin \angle XOP^1 = \sin(-\theta) = \frac{P^1M^1}{OP^1} = -\frac{PM}{OP} = -\sin\theta$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\cos(-\theta) = \frac{OM^1}{OP^1} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$

ಮತ್ತು $\tan(-\theta) = \frac{P^1M^1}{OM^1} = \frac{-PM}{OM} = -\tan\theta$

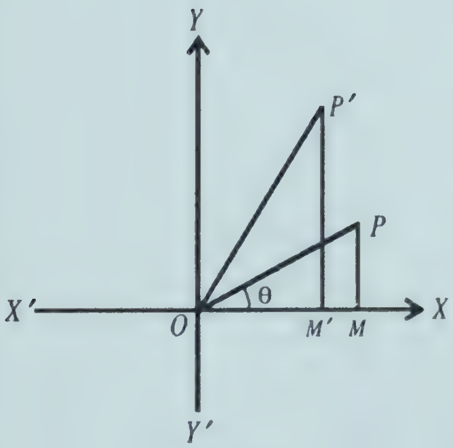
$\therefore \quad \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$

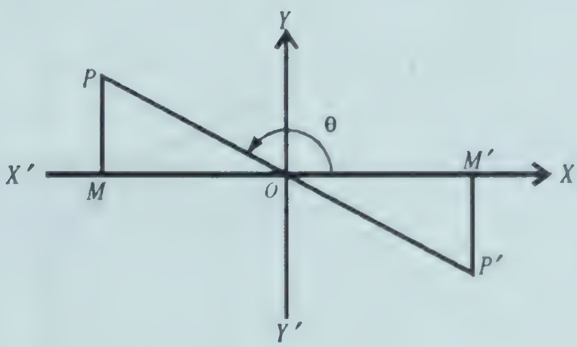
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

(ii) $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (9.22 - 9.25) $\angle XOP = \theta$, $\angle XOP^1 = \frac{\pi}{2} - \theta$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 9.22



ಚಿತ್ರ 9.23

ಆಗ $\angle OMP = \angle OM^1P^1 = 90^\circ$

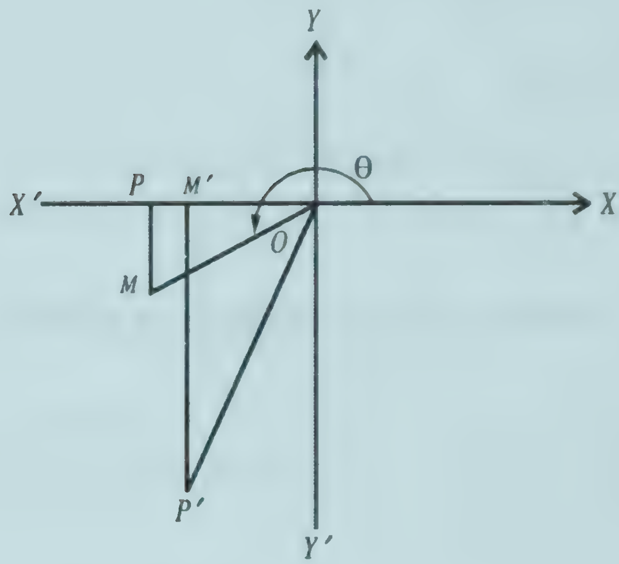
$\angle POM = \angle OP^1M^1 = \theta$

ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು $OP=OP^1$ ಆದ್ದರಿಂದ

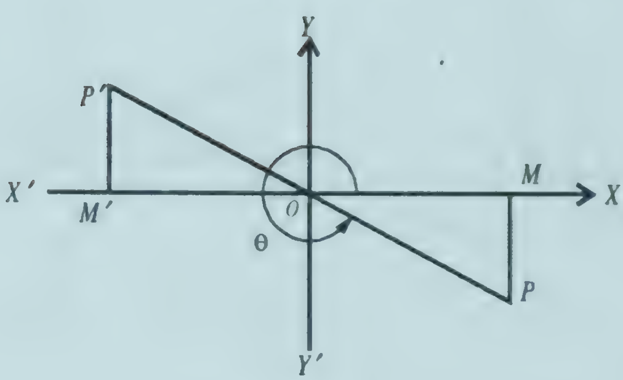
$\Delta^{ie}\, OMP$ ಮತ್ತು $\Delta^{ie}\, OM^1P^1$ ಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಆಗಿವೆ.

$\therefore \quad OM=M^1P^1, MP=OM^1$ ಮತ್ತು $OP=OP^1$ ..... (1)

ಈಗ, $\sin\angle XOP^1=\sin(90°-\theta)=\dfrac{P^1M^1}{OP^1}=\dfrac{OM}{OP}$ (ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ)



ಚಿತ್ರ, 9.24



ಚಿತ್ರ, 9.25

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(90°-\theta)=\cos\theta$

ಅಂತೆಯೇ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(90^\circ-\theta)=\frac{OM^1}{OP^1}=\frac{PM}{OP}=\sin\theta$

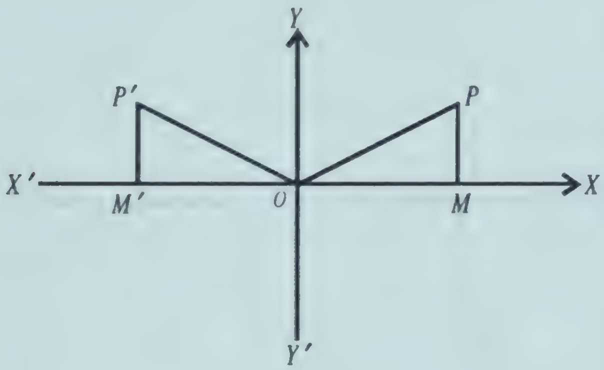
ಮತ್ತು $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan(90^\circ-\theta)==\frac{P^1M^1}{OM^1}=\frac{OM}{PM}=\cot\theta$

ಆದ್ದರಿಂದ

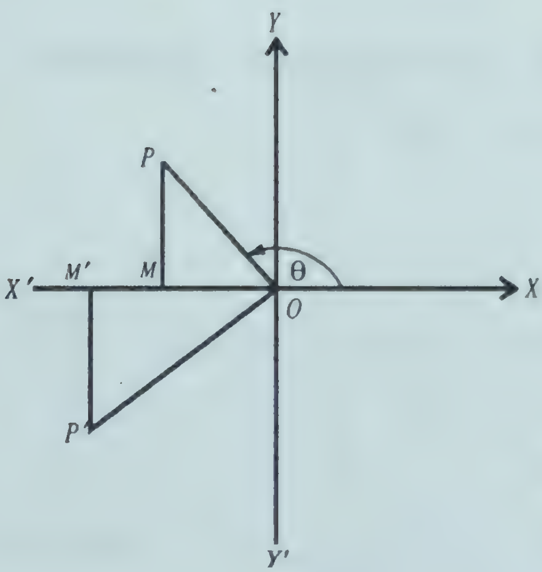
$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta, \sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$ ಮತ್ತು

$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$

(iii) $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ **ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು**



ಚಿತ್ರ 9.26



ಚಿತ್ರ 9.27

ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (9.26 - 9.29) $\angle XOP = \theta$ ಮತ್ತು $\angle XOP^1 = \frac{\pi}{2} + \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ

$$\angle OMP = \angle OM^1P^1 = 90^\circ \quad \angle POM = \angle OP^1M^1 = \theta \quad OP = OP^1$$

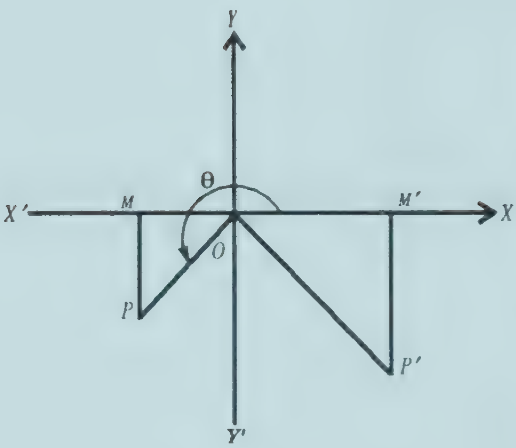
$$\therefore \quad \Delta^{le}\, OMP \equiv \Delta^{le}\, OM^1p^1 \quad \therefore\, OM = M^1P^1,\; MP = -OM^1,\; OP = OP^1$$

$$\therefore \quad \sin \angle MOP^1 = \sin(90^\circ + \theta) = \frac{P^1M^1}{OM^1}\; \frac{OM}{-MP} = \cot\theta$$

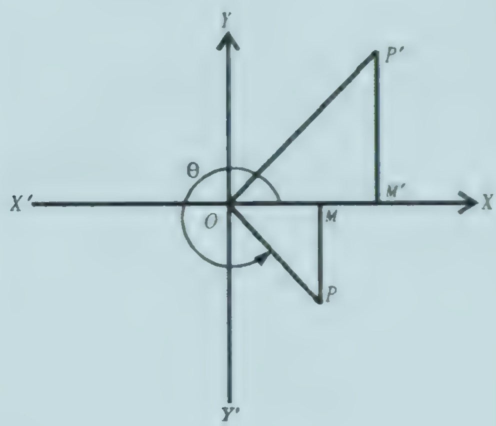
ಆದ್ದರಿಂದ

$$\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta,\; \sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

ಮತ್ತು $\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$



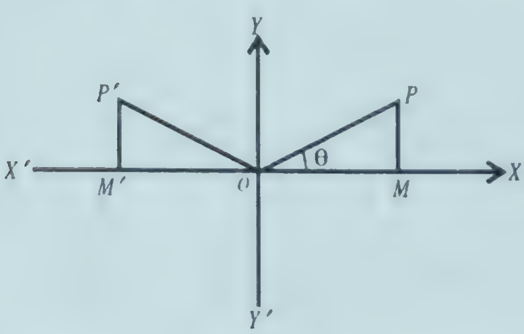
ಚಿತ್ರ 9.28



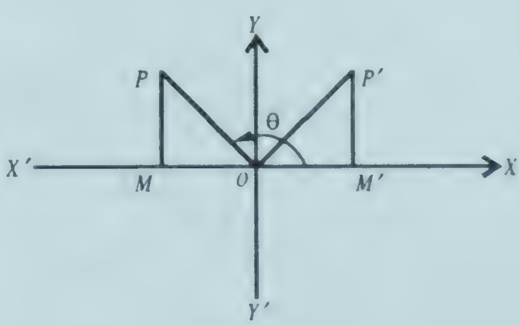
ಚಿತ್ರ 9.29

(iv) $(\pi - \theta)$ **ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು**

ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (9.30 - 9.33)



ಚಿತ್ರ 9.30



ಚಿತ್ರ 9.31

$\angle XOP=\theta$ ಮತ್ತು $\angle XOP^1=\pi-\theta$

ಹಾಗೂ $\angle MOP=\angle M^1OP^1, \angle PMO=\angle P^1M^1O=90°, OP=OP^1$

$\therefore \quad \Delta^{le}\, OMP \cong \Delta^{le}\, OM^1p^1$

$\therefore \quad OM=-OM^1, MP=M^1P^1, OP=OP^1 \qquad \text{..... (1)}$

$$\therefore \quad \sin(\pi-\theta)=\sin(180°-\theta)=\sin\angle MOP^1=\frac{M^1P^1}{OP}=\frac{MP}{OP}$$

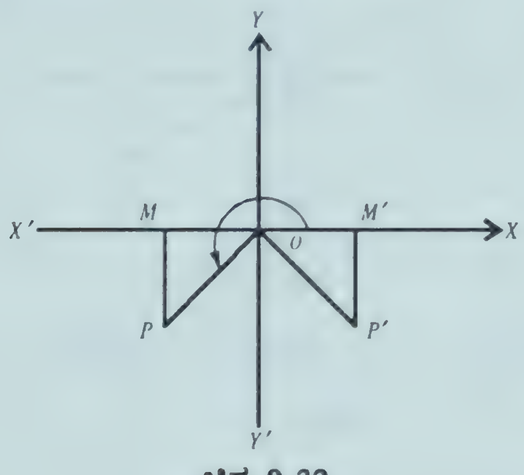
[(1) ರಿಂದ)]

$$\cos(\pi-\theta)=\cos(180°-\theta)=\frac{OM^1}{OP^1}=\frac{-OM}{OP}=-\cos\theta$$

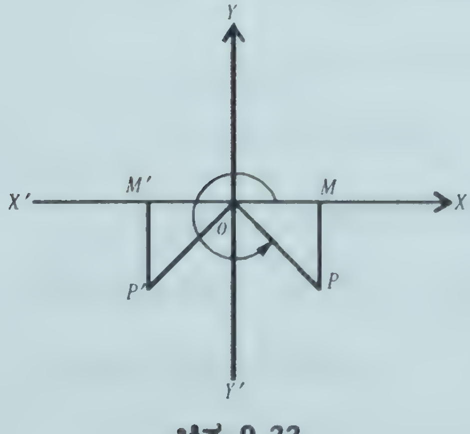
$$\tan(\pi-\theta)=\tan(180°-\theta)=\frac{M^1P^1}{OM^1}=\frac{MP}{-OM}=-\tan\theta$$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}(\pi-\theta)\operatorname{cosec}\theta, \sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$

ಮತ್ತು $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$

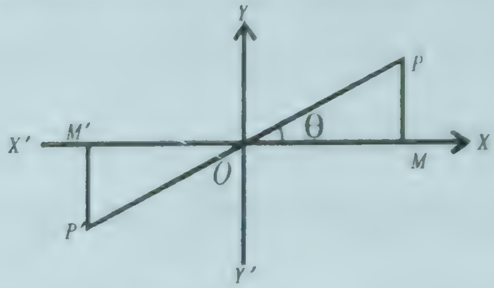


ಚಿತ್ರ 9.32

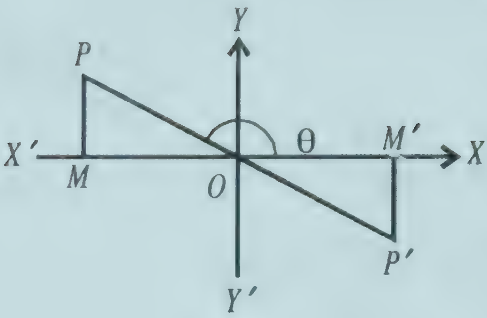


ಚಿತ್ರ 9.33

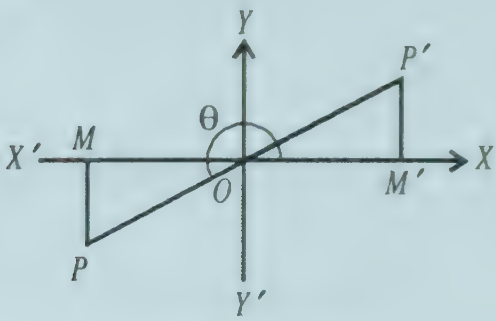
(v) $\pi+\theta$ **ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು**



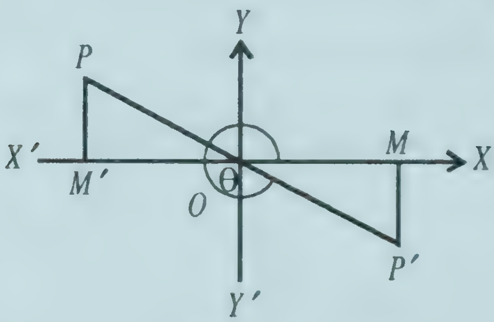
ಚಿತ್ರ 9.34



ಚಿತ್ರ 9.35



ಚಿತ್ರ 9.36



ಚಿತ್ರ 9.37

$\angle XOP=\theta$ ಮತ್ತು $\angle XOP^1=180°+\theta$ ಆಗಿರಲಿ.

ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (9.34 - 9.37)

$\angle OM^1P^1=\angle OMP=90°$

$\angle M^1OP^1=\angle MOP=\theta$

$OP^1=OP$

$\therefore\ \Delta^{le}\ OM^1P^1\equiv\Delta^{le}\ OMP$

$\therefore OM^1=-OM,\ \ P^1M^1=-PM\ \ OP=OP^1$ ..... (1)

$\therefore\quad \sin\angle XOP^1=\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$ [(1) ರಿಂದ]

ಅಂದರೆ, $\sin(\pi+\theta)=\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$

ಅಂತೆಯೇ, $\cos(\pi+\theta)=\cos(180^\circ+\theta)=\frac{OM^1}{OP^1}=\frac{-OM}{OP}=-\cos\theta$

ಮತ್ತು $\tan(\pi+\theta)=\tan(180^\circ+\theta)=\frac{P^1M^1}{OM^1}=\frac{PM}{-OM}=\tan\theta$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\operatorname{cosec}(\pi+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta, \sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$

ಮತ್ತು $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$.

ಗಮನಿಸಿ :

1. $2\pi\pm\theta$ *ಕೋನಗಳ ಅಥವಾ* $2n\pi\pm\theta$ *(ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ* $\pm\theta$ *ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ಸಮ. ಅಂದರೆ*

$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$, $\sin(2n\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$, $\cos(2n\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$, $\tan(2n\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

2. *ಈ ಎಲ್ಲಾ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.*

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ $\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$

$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$ $\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$ $\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. *ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.*

(i) $\operatorname{cosec}225^\circ$ (ii) $\tan 240^\circ$ (iii) $\tan(-945^\circ)$

(iv) $\sin 4620^\circ$ (v) $\cos 510^\circ$

(i) $\operatorname{cosec}225^\circ=\operatorname{cosec}(180^\circ+45^\circ)$

$$= -\operatorname{cosec} 45° = -\sqrt{2}$$

(ii) $\tan 240° = \tan(180° + 60°)$

$$= \tan 60° = \sqrt{3}$$

(iii) $\tan(-945°) = -\tan 945°$

$$= -\tan(3 \times 360° - 135°)$$

$$= -\tan(-135°)$$

$$= \tan(90° + 45°)$$

$$= -\cot 45° = -1.$$

(iv) $\sin 4620°$

$$= \sin(12 \times 360° + 300°)$$

$$= \sin 300°$$

$$= \sin(360° - 60°) = -\sin 60°$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(v) $\cot 510° = \cos(360° + 150°)$

$$= \cos(150°)$$

$$= \cos(180° - 30°)$$

$$= -\cos 30°$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. *ಸರಳ ಗೊಳಿಸಿ :*

$$\frac{\cot(450° + A)\sin(180° + 2A)\cos(720° - A)}{\cos(180° + A)\sin(360° - A)\cos(630° + A)}$$

ಈಗ, ಸೂತ್ರಗಳನ್ನ ಬಳಸಿ

$$\cot(450° + A) = \cot(360° + 90° + A)$$

$$= \cot(90° + A)$$

$$= -\tan A$$

$$\sin(180° + 2A) = -\sin 2A$$

$$\cos(720° - A) = \cos(2\times 360° - A)$$

$$= \cos(-A)$$

$$= \cos A$$

$$\cos(180° + A) = -\cos A, \sin(360° - A) = -\sin A$$

$$\cos(630° + A) = \cos(720° - 90° + A)$$

$$= \cos(720° - \{90° - A\})$$

$$= \cos(90° - A)$$

$$= \sin A$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉಕ್ತಿಯು

$$\frac{-\tan A(-\sin 2A)\cos A}{-\cos A(-\sin A)\sin A}$$

$$= \frac{\tan A(2\sin A)\cos A}{\sin A \sin A}$$

$$= 2\tan A \cot A = 2$$

3. $\angle A = 18°$ ಆದರೆ $\cos 2A = \sin 3A$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$$\cos 2A = \cos 36°$$

$$= \cos(90° - 54°)$$

$$= \sin 54°$$

$$= \sin(3\times 18°)$$

$$= \sin 3A.$$

4. θ ದ ಬೆಲೆಯು 0 ದಿಂದ 360° ವರೆಗೆ ಇದ್ದು,

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಾದರೆ

θ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ ಅಂದರೆ, $\sin\theta$ ವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ θ ಕೋನವು 1ನೇ ಅಥವಾ 1ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \theta=30°,150° \qquad \text{.... (1)}$$

$\tan\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ಅಂದರೆ $\tan\theta$ ವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ θ ವು 2ನೇ ಅಥವಾ 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \theta=150°,330°$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\theta=150°$.

5. θ ಕೋನವು 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದ್ದು, $\cot^2\theta=4$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದ್ದರೆ, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ $(\sec\theta-\operatorname{cosec}^2\theta)$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈಗ, $\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1$

ಅಥವಾ $4=\operatorname{cosec}^2\theta-1$

ಅಥವಾ $5=\operatorname{cosec}^2\theta$

ಅಥವಾ $-\sqrt{5}=\operatorname{cosec}\theta$ [$\because$ ವು θ 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ]

ಹಾಗೆಯೇ $\cot^2\theta=4$

ಅಥವಾ $\tan^2\theta=\frac{1}{4}$

$$\therefore \quad \sec^2\theta=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \qquad (\because \sec^2\theta=1+\tan^2\theta)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, (θ ವು 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ)

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \ (\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

6. $\operatorname{cosec}\theta=\frac{13}{12}$ ಆಗಿದ್ದು $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, ಆದರೆ $\frac{5\sin\theta-4\tan\theta}{2\cos\theta+2\operatorname{cosec}\theta}$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚಿನ್ನ 9.38ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $PM=12$ ಮತ್ತು $OP=13$ ಆಗಿರಲಿ.

OPM ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

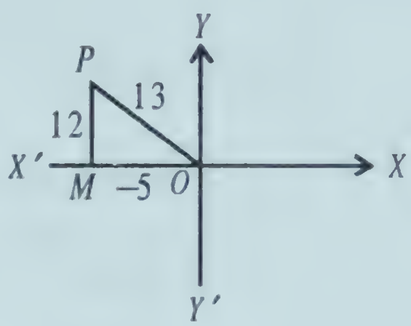
$OP^2=OM^2+PM^2$

$\therefore\ OP^2=OM^2=OM^2$ ಅಂದರೆ,

$169-144=OM^2$ ಅಥವಾ

$25=OM^2$

$\therefore\ OM=\pm5$



ಚಿತ್ರ 9.38

θ ಕೋನವು 2ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ

$$OM=-5 \quad \therefore \quad \frac{5\sin\theta-4\tan\theta}{3\cos\theta+2\operatorname{cosec}\theta}=\frac{5\times\frac{12}{13}-4\times\frac{12}{-5}}{3\left(\frac{-5}{13}\right)+2\left(\frac{13}{12}\right)}$$

$$= \frac{\frac{60}{13}+\frac{48}{5}}{\frac{-15}{13}+\frac{26}{12}}=\frac{\frac{300+624}{65}}{\frac{-180+338}{156}}$$

$$= \frac{924}{65}\times\frac{156}{158}=\frac{462\times12}{79\times5}=\frac{5544}{395}$$

7. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ x ಮತ್ತು y ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\sin 2x^\circ = 0.7660$ (ii) $\cos\left(\frac{1}{2}y^\circ + 71^\circ\right) = -0.3420$

(i) $\sin 2x^\circ > 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $2x^\circ$ ಯು I ಅಥವಾ II ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$0.7660 = \sin 50^\circ$

$\therefore \quad 2x^\circ = 50^\circ$ ಅಥವಾ $2x^\circ = 180 - 50^\circ$

i.e., $x = 25^\circ$ ಅಥವಾ $x^\circ = 65^\circ$

(ii) $\left(\frac{1}{2}y^\circ + 71^\circ\right)$ ಯು II ಅಥವಾ IV ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$\cos 70^\circ = 0.3420$

$\therefore \quad \frac{1}{2}y^\circ + 71^\circ = 180 - 70^\circ$ ಅಥವಾ $\frac{1}{2}y^\circ + 71^\circ = 180 + 70^\circ$

$y = 78^\circ$ ಅಥವಾ $y = 358^\circ$

8. $\cot\frac{\pi}{24}.\cot\frac{3\pi}{24}.\cot\frac{5\pi}{24}.\cot\frac{7\pi}{24}.\cot\frac{9\pi}{24}.\cot\frac{11\pi}{24}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$A + B = \frac{\pi}{2}$ ಆದರೆ $B = \frac{\pi}{2} - A$

$\therefore \cot B = \cot\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \tan A$

ಈಗ, $\frac{\pi}{24} + \frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \cot\frac{11\pi}{24} = \tan\frac{\pi}{24}$

$\frac{3\pi}{24} + \frac{9\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \cot\frac{9\pi}{24} = \tan\frac{3\pi}{24}$

$\frac{5\pi}{24} + \frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \cot\frac{7\pi}{24} = \tan\frac{5\pi}{24}$

$$\therefore \quad \cot\frac{\pi}{24}.\cot\frac{3\pi}{24}.\cot\frac{5\pi}{24}.\cot\frac{7\pi}{24}.\cot\frac{9\pi}{24}.\cot\frac{11\pi}{24}$$

$$= \left(\cot\frac{\pi}{24}.\cot\frac{11\pi}{24}\right)\left(\cot\frac{3\pi}{24}.\cot\frac{9\pi}{24}\right)\left(\cot\frac{7\pi}{24}.\cot\frac{5\pi}{24}\right)$$

$$= \left(\cot\frac{\pi}{24}\tan\frac{\pi}{24}\right)\left(\cot\frac{3\pi}{24}\tan\frac{3\pi}{24}\right)\left(\cot\frac{5\pi}{24}\tan\frac{5\pi}{24}\right)$$

$$= (1)(1)(1) \quad = 1$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.4

1. *ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.*

   (i) $\sin 840°$ (ii) $\cos 720°$ (iii) $\sec 3120°$

   (iv) $\tan 570°$ (v) $\operatorname{cosec} 600°$ (vi) $\cot 405°$

   (vii) $\cos(-330°)$ (viii) $\sin(-600°)$ (ix) $\cot 225°$

2. *ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ A ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.*

   $(0° \le A \le 360°)$

   (i) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sec A = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ (iii) $\operatorname{cosec} A = -2$

   (iv) $\tan A = -1$ (ii) $\cos A = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

3. *ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.*

   (i) $\sin 600° \cos 330° + \cos 120° \sin 150°$

   (ii) $\cos 570° \sin 510° - \sin 330° \cos 390°$

   (iii) $\sin\frac{5\pi}{6} - 2\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6}$

4. $\dfrac{\cos^2 51^\circ}{\sin^2 129^\circ} - \dfrac{\cos(90^\circ - A)}{\cos(90^\circ + A)} = \operatorname{cosec}^2 51^\circ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $\cos A + \sin(270^\circ + A) - \sin(270^\circ - A) + \cos(180^\circ + A) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $\sec(270^\circ - A)\sec(90^\circ - A) - \tan(270^\circ - A)\tan(90^\circ + A) + 1 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $\dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ-\theta)} + \dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)} + \dfrac{\tan(90^\circ-\theta)}{\cot\theta} = 3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. A, B, C, D ಗಳು ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳಾದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನ ಸಾಧಿಸಿ.

   (i) $\sin(A+B)+\sin(C+D)=0$

   (ii) $\cos(A+B)-\cos(C+D)=0$

10. (i) $\cos 170^\circ + \sin 80^\circ = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

    (ii) $\tan 40^\circ + \cot 130^\circ = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{-3}{12}$ ಮತ್ತು $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ ಆದರೆ

    $\dfrac{4\sin\theta - 2\cos\theta}{\sin\theta + 3\cos\theta}$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\cos\theta = \dfrac{15}{17}$ ಮತ್ತು $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ಆದರೆ

    $\dfrac{2\operatorname{cosec}\theta - 4\sin\theta}{\cot\theta - 2\sec\theta}$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $\cot\theta = \dfrac{-4}{3}$ ಮತ್ತು $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ಆದರೆ

$\frac{5\sin\theta - 4\cot\theta}{4\sec\theta + 2\tan\theta}$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. A, B, C ಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

(i) $\cos A = -\cos(B+C)$

(ii) $\tan\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$

(iii) $\sin\frac{(B+C)}{2} = \cos\frac{A}{2}$

15. ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ $ABCD$ ಯಲ್ಲಿ

(i) $\sin A = \sin C$

(ii) $\cos B + \cos D = 0$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸರಳ ಗೊಳಿಸಿ :-

16. $$\frac{\cos(-A)\tan(90^\circ - A)\tan(180^\circ + A)}{\cot(90^\circ + A)\sin(360^\circ - A)\cos(180^\circ - A)}$$

17. $$\tan\frac{5\pi}{4}\cot\frac{9\pi}{4} + \tan\frac{17\pi}{4}\cot\frac{15\pi}{4}$$

18. $$\frac{\sec(180^\circ + A)\tan(180^\circ + A)\operatorname{cosec}(90^\circ + A)}{\sec(-A)\cot(90^\circ + A)}$$

19. $$\frac{\tan\frac{3\pi}{4}\cos 4\pi\sin\frac{4\pi}{3}}{\operatorname{cosec}\frac{9\pi}{2}\cot\left(\frac{-\pi}{3}\right)\sec\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

20. $$\frac{\tan^2\frac{2\pi}{3}\cot^2\frac{4\pi}{3} - \cot^2\frac{7\pi}{6}\tan^2\frac{4\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{2} - \sec\frac{8\pi}{3}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{4}}$$

21. $\frac{\sin(270°-\theta)}{\sin(450°+\theta)}+\frac{\tan(\theta-180°)\cot(720°-\theta)\sin^2(-\theta)}{\cos(\theta-270°)\sin(540°-\theta)}$

22. $\cos 24°+\cos 204°+\cos 55°+\cos 125°+\cos 300°$

23. $\tan^2\theta+\sec\theta=5$ ಆಗಿದ್ದು θ ವು ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, $\cos\theta$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

24. x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{x\sin^2 300°\sec^2 240°}{\cos^2 225°\operatorname{cosec} 240°}=\cot^2 315°\tan^2 300°$$

25. $\tan 25°=a$ ಆದರೆ $\frac{\tan 245°+\tan 335°}{\tan 205°-\tan 115°}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ : -

26. $\sin^2(41°+\theta)+\sin^2(49°-\theta)=1$

27. $\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{7\pi}{19}+\cos\frac{12\pi}{19}+\cos\frac{16\pi}{19}=0$

28. $\tan 1°\tan 2°\tan 3°.................\tan 89°=1$

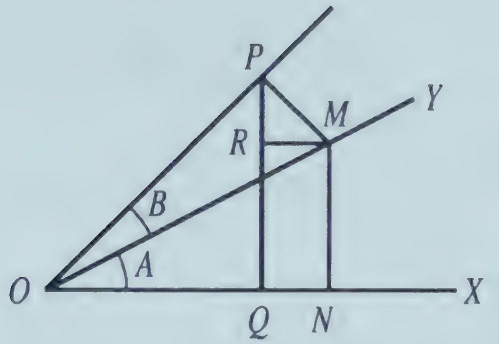
9.4.2 ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿದ್ದರೆ $A+B$ ಮತ್ತು $A-B$ ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧಗಳಿವೆ. ನಾವೀಗ ಈ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ :

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$



ಚಿತ್ರ 9.39

ಒಂದು ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು OX ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OY ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರಲಿ. ಇದ್‌ ಅಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ B ಕೋನವನ್ನು ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ ಬರುವ OZ ನ ಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. PQ ವನ್ನು OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. PM ನ್ನು OY ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. M ನಿಂದ PQ ಗೆ MR ನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. MN ನ್ನು OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ RPM ನಲ್ಲಿ

$\angle RPM = 90° - \angle PMR$ (ಚಿತ್ರ 9.39) PM ರೇಖೆಯು OY ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $90° - \angle PMR = \angle RMO$ $\therefore$ $\angle RPM = \angle RMO$

$\therefore$ $\angle RPM = \angle RMO$ $RM \| OX \therefore \angle RMO = \angle A$ ಮತ್ತು $\angle RPM = \angle A$ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ PQO ನಲ್ಲಿ

$$\text{(i)}\ \sin(A+B) = \frac{PQ}{OP} = \frac{PR+RQ}{OP}$$

$$= \frac{RQ}{OP} + \frac{PR}{OP}$$

$$= \frac{MN}{OP} + \frac{PR}{OP} \quad [\therefore RQ = MN]$$

$$= = \frac{MN}{OM} . \frac{OM}{OP} + \frac{PR}{PM} \frac{PM}{OP}$$

$$\therefore \quad \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

(ii) $\cos(A+B)=\dfrac{OQ}{OP}$

$$=\frac{ON-QN}{OP}$$

$$=\frac{ON}{OP}-\frac{ON}{OP}$$

$$=\frac{ON}{OP}-\frac{RM}{OP} \qquad [\therefore QN=RM]$$

$$=\frac{ON}{OM}\cdot\frac{OM}{OP}-\frac{RM}{PM}\cdot\frac{PM}{OP}$$

$\therefore \quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(iii) $\tan(A+B)=\dfrac{PQ}{OQ}$

$$=\frac{OR+RP}{ON-QN}$$

$$=\frac{MN+RP}{ON-RM} \qquad \left[\begin{array}{l}\because QR=MN\\ QN=RM\end{array}\right]$$

$$=\frac{\frac{MN}{ON}+\frac{RP}{ON}}{1-\frac{RM}{ON}}=\frac{\tan A+\frac{RP}{ON}}{1-\frac{RM}{RP}\cdot\frac{RP}{ON}}$$

$$=\frac{\tan A+\frac{RP}{ON}}{1-\tan A.\,\frac{RP}{ON}}$$

ಈಗ, $\Delta^{le}\ RPM\ |||\ \Delta^{le}\ OMN$ ಆದ್ದರಿಂದ

$$\therefore \quad \frac{RM}{MN}=\frac{PM}{OM}=\frac{RP}{ON}$$

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ, $\frac{PM}{OM}=\tan B$

$$\therefore \quad \frac{RP}{ON}=\tan B$$

$$\therefore \quad \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ B ಯನ್ನು $(-B)$ ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ

$$\sin(A-B)=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$

$$\therefore \quad \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$[\therefore \cos(-B)-\cos B, \sin(-B)=-\sin B]$ ಮತ್ತು

$$\cos(A-B)=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$

$$\therefore \quad \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A+\tan(-B)}{1-\tan A\tan(-B)}$$

$$\therefore \quad \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\tan 75^\circ$ (ii) $\cos 105^\circ$ (iii) $\sin 15^\circ$ (iv) $\cos 165^\circ$

(i) $\tan 75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)$

$$= \frac{\tan 30° + \tan 45°}{1 - \tan 30° \tan 45°} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.1}$$

(ii) $\cos 105° = \cos(60° + 45°)$

$$= \cos 105° = \cos(60° + 45°)$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)$$

(iii) $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

(iv) $\cos 165° = \cos(180° - 15°)$

$$= -\cos 15° = -\cos(45° - 30°)$$

$$= -[\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°]$$

$$= -\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2}\right]$$

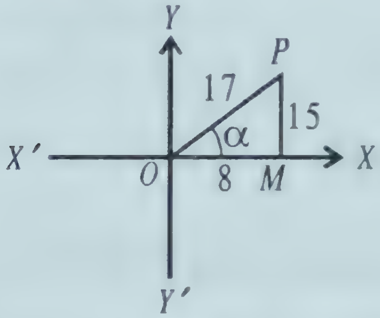
$$= -\left[\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$\therefore \quad \cos 165° = -\frac{(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$

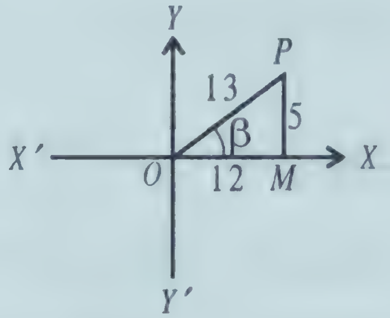
2. $\sin\alpha = \frac{15}{17}$ ಮತ್ತು $\cos\beta = \frac{12}{13}$ ಆದರೆ

$\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha-\beta)$ ಮತ್ತು $\tan(\alpha+\beta)$ ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎರಡು ಲಂಬ ತ್ರಿಕೋಣಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತ sin ಮತ್ತು cos ಪ್ರಮಾಣಗಳಿರುವಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳು (8, 15, 17) ಮತ್ತು (5, 12, 13) ಆಗಿರುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರಗಳು 9.40-9.41).



ಚಿತ್ರ 9.40



ಚಿತ್ರ 9.41

(i) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\sin\beta$

$$= \frac{15}{17}.\frac{12}{13} + \frac{8}{17}.\frac{5}{13} \quad \left(\because \cos\alpha = \frac{8}{17}, \sin\beta = \frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{180+40}{221} = \frac{220}{221}$$

(ii) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{8}{17}.\frac{12}{13} + \frac{15}{17}.\frac{5}{13} \quad \left(\because \cos\alpha = \frac{8}{17}, \sin\beta = \frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{96+75}{221} = \frac{171}{221}$$

ಚಿತ್ರ 9.40 ಮತ್ತು 9.41ಗಳಲ್ಲಿ, $\tan\alpha = \frac{15}{8}, \tan\beta = \frac{5}{12}$

$$\therefore \quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{\frac{15}{8}+\frac{5}{12}}{1-\frac{15}{8}.\frac{5}{12}} = \frac{\frac{180+40}{96}}{\frac{96-75}{96}}$$

$$= \frac{220}{21}.$$

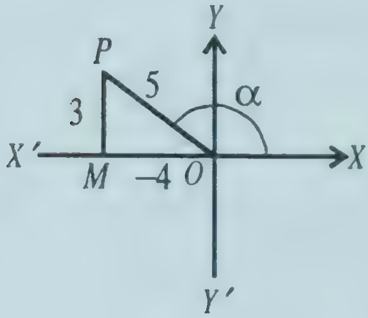
3. $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ಮತ್ತು $\cos\beta = \frac{5}{13}, 3\frac{\pi}{2} < \beta < 2\pi$ ಆದರೆ

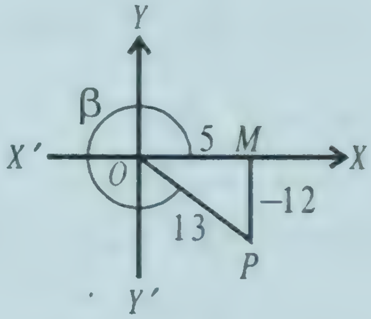
$\sin(\alpha+\beta)$ ಮತ್ತು $\cos(\alpha-\beta)$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ α ಕೋನವು II – ಪಾದದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು β ಕೋನವು IV – ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\cos\alpha < 0$ ಮತ್ತು $\sin\beta < 0$.



ಚಿತ್ರ 9.42



ಚಿತ್ರ 9.43

ಚಿತ್ರ 9.42 ಮತ್ತು 9.43ಗಳಿಂದ, $\cos\alpha = -4/5$ ಮತ್ತು $\sin\beta = -12/13$

$\therefore \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{3}{5}.\frac{5}{13} + \left(-\frac{4}{5}\right).\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{63}{65}$$

ಮತ್ತು $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)+\frac{3}{5}\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$= -\frac{20}{65}-\frac{36}{65} = -\frac{56}{65}$$

4. $\tan A=\dfrac{x}{x+1}$ ಮತ್ತು $\tan B=\dfrac{1}{2x+1}$ ಆದರೆ $A+B=\dfrac{\pi}{4}$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಸೂತ್ರದಂತೆ

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = \frac{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}}{1-\dfrac{x}{(x+1)}\dfrac{1}{(2x+1)}}$$

ಮೇಲಿನದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ

$\tan(A+B)=\dfrac{2x^2+2x+1}{2x^2+2x+1}=1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore \quad A+B=\pi/4$.

5. $\dfrac{\cos 15°+\sin 15°}{\cos 15°-\sin 15°}=\sqrt{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\dfrac{\cos 15°+\sin 15°}{\cos 15°-\sin 15°} = \dfrac{\dfrac{\cos 15°}{\cos 15°}+\dfrac{\sin 15°}{\cos 15°}}{\dfrac{\cos 15°}{\cos 15°}-\dfrac{\sin 15°}{\cos 15°}}$

$$= \frac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°} = \frac{\tan 45°+\tan 15°}{1-\tan 45°\ \tan 15°} \quad [\because 1=\tan 45°]$$

$$= \tan(45°+15°) = \tan 60°=\sqrt{3}.$$

6. $\frac{1}{\tan 3A+\tan A}-\frac{1}{\cot 3A+\cot A}=\cot 4A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{1}{\tan 3A+\tan A}-\frac{1}{\frac{1}{\tan 3A}+\frac{1}{\tan A}}$$

$$=\frac{1}{\tan 3A+\tan A}-\frac{1}{\frac{\tan A+\tan 3A}{\tan 3A\tan A}}$$

$$=\frac{1}{\tan 3A+\tan A}-\frac{\tan 3A\tan A}{\tan 3A+\tan A}$$

$$=\frac{1-\tan 3A\tan A}{\tan 3A+\tan A}=\frac{1}{\frac{\tan 3A+\tan A}{1-\tan 3A\tan A}}$$

$$=\frac{1}{\tan(3A+A)}=\frac{1}{\tan 4A}=\cot 4A.$$

7. $A+B=225^\circ$ ಆದರೆ

$\frac{\cot A}{1+\cot A}\cdot\frac{\cot B}{1+\cot B}=\frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $A+B=225^\circ=180^\circ+45^\circ$

$\cot 225^\circ=\cot(180^\circ+45^\circ)=\cot 45^\circ=1$

$\therefore\quad \cot(A+B)=1$

i.e., $\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=1$

ಅಥವಾ $\cot A\cot B-1=\cot A+\cot B$

$\cot A \cot B$ ಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$2\cot A\cot B-1=\cot A+\cot B+\cot A\cot B$$

$$i.e \quad 2\cot A\cot B=1+\cot A+\cot B+\cot A\cot B$$

ಅಥವಾ $\quad 2\cot A\cot B=(1+\cot A)(1+\cot B)$

ಅಥವಾ $\quad \dfrac{\cot A\cot B}{(1+\cot A)(1+\cot B)}=\dfrac{1}{2}$

ಅಂದರೆ $\quad \dfrac{\cot A}{1+\cot A}\cdot\dfrac{\cot B}{1+\cot B}=\dfrac{1}{2}$

8. $\quad \dfrac{\sin(\theta+\psi)}{\sin(\theta-\psi)}=\dfrac{x+y}{x-y}$ ಆದರೆ $x\tan\psi=y\tan\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅನುಪಾತ ನಿಯಮದಂತೆ, ಅಂದರೆ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ಆದರೆ,

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin(\theta+\psi)+\sin(\theta-\psi)}{\sin(\theta+\psi)-\sin(\theta-\psi)}=\frac{x+y+x-y}{x+y-x+y}$$

$$\frac{\sin\theta\cos\psi+\cos\theta\sin\psi+\sin\theta\cos\psi-\cos\theta\sin\psi}{\sin\theta\cos\psi+\cos\theta\sin\psi-\sin\theta\sin\psi+\cos\theta\sin\psi}=\frac{2x}{2y}$$

$$\frac{2\sin\theta\cos\psi}{2\cos\theta\sin\psi}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{y\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x\sin\psi}{\cos\psi}$$

$$y\tan\theta=x\tan\psi$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.5

1. α ಮತ್ತು β ಎರಡು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿ $\operatorname{cosec}\alpha = 3/2$ ಮತ್ತು $\tan\beta = 3/4$ ಆದರೆ $\sin(\alpha-\beta)$ ಮತ್ತು $\cos(\alpha-\beta)$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\sin 75°, \cos 105°$ ಮತ್ತು $\tan 75°$ ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $\cos(A+B)+\sin(A-B)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+B\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $1-\tan(45°+\alpha)\tan(45°-\alpha)=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $\sqrt{2}\cos(45°-A)=\cos A+\sin A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $\tan(\alpha+\beta)=1$ ಮತ್ತು $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ಆದರೆ $\tan\beta$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $\tan(A-B)=7/24$ ಮತ್ತು $\tan A=4/3$ ಆಗಿದ್ದು, A ಮತ್ತು B ಗಳು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\tan B=\left(\frac{3}{4}\right)$ ಮತ್ತು $A+B=\pi/2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $\sin 75° - \sin 15° = \cos 105° + \cos 15°$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\beta+\alpha)\cos\alpha=\sin\beta\sin\gamma$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=\tan x, \tan y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $\frac{\cos 13°+\sin 13°}{\cos 13°-\sin 13°}=\tan 58°$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $\tan 7A \ \tan 4A \ \tan 3A=\tan 7A-\tan 4A-\tan 3A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $\sin\theta = 3\sin(\theta + 2\alpha)$ ಆದರೆ $\sin(\theta+\alpha) + 2\tan\alpha = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $\frac{\cos 3A}{\sin A} + \frac{\sin 3A}{\sin A} = 2\cot 2A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

16. $\cot(\alpha+\beta)\cot(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

17. $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ$

18. $\sec 15^\circ + \operatorname{cosec} 15^\circ = 2\sqrt{6}$

19. $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

20. $\frac{\cos 11^\circ + \sin 11^\circ}{\cos 11^\circ - \sin 11^\circ} = \tan 56^\circ$

21. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right) = \frac{-1}{2}$

22. $\cos A\cos(C-A) - \sin A\sin(C-A) = \cos C$

23. $A+B = 135^\circ$ ಆದರೆ $(1+\cot A)(1+\cot B) = 2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

24. $\sin A = \frac{15}{17}$ ಮತ್ತು $\cos B = \frac{9}{41}$ ಆದರೆ

$\sin(A+B)$ ಮತ್ತು $\cos(A-B)$ ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

25. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{17}{8}$ ಮತ್ತು $\cot\beta = \frac{12}{5}$ ಆಗಿದ್ದು α ಮತ್ತು β ಗಳು ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)$, $\sec(\alpha-\beta)$ ಮತ್ತು $\operatorname{tanc}(\alpha-\beta)$ ಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

26. $\tan A = 2$, $\tan B = 3$ A ಮತ್ತು B ಯು ಲಘುಕೋನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $A+B = 135^\circ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

27. $(1+\tan\theta)(1+\tan\phi)=2$ ಆದರೆ $\theta+\phi$ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

28. $\tan A=\frac{1}{2}, \tan B=\frac{1}{3}, \tan C=\frac{1}{5}$ ಆದರೆ $\tan(A-B+C)=\frac{6}{17}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

29. $\cot\alpha\cot\beta=2$ ಆದರೆ $\cos(\alpha-\beta)=3\cos(\alpha+\beta)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9.4.3 ಗುಣಿತ ಮತ್ತು ಉಪಗುಣಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಒಂದು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನ θ ಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ, 2θ, 3θ, 4θ, ... ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ***"ಗುಣಿತ ಕೋನ"*** ಗಳೆಂತಲೂ ಮತ್ತು ಅದರ ಭಾಗಗಳಾದ θ/2, θ/3, ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ***"ಉಪಗುಣಿತ ಕೋನ"*** ಗಳೆಂತಲೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1. 2*A* ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

(i) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $B=A$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$\sin(A+A)=\sin A\cos A+\cos A\sin A$

ಅಂದರೆ, $\sin 2A=2\sin A\cos A$ .... (1)

(ii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $B=A$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$\cos(A+B)=\cos A\cos A-\sin B\cos B$

$\therefore \quad \cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$ ... (2A)

ಈಗ, ಫಲಿತಾಂಶ (2A)ಯಿಂದ

$\cos 2A=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A$

$\left[\because \cos^2 A=1-\sin^2 A\right]$

$\therefore \quad \cos 2A=1-2\sin^2 A$ ... (2B)

ಪುನಃ ಫಲಿತಾಂಶ (2A)ಯಿಂದ $\cos 2A=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)$

$\therefore \quad \cos 2A=2\cos^2 A-1$ ...(2C)

(iii) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $B=A$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$$\tan(A+A)=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}$$

ಅಥವಾ $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

ಫಲಿತಾಂಶ (2A), (2B) ಮತ್ತು (2C)*ಗಳಲ್ಲಿ* $2A=\theta$ (*ಅಥವಾ* $A=\dfrac{\theta}{2}$) ಎಂದು *ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು :*

(i) $\sin\theta=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

(ii) $\cos\theta=\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-1=1-2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

(iii) $\tan\theta=\dfrac{2\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$

ಸೂಚನೆ :- ಮೇಲಿನ (2A), (2B) ಸೂತ್ರಗಳಿಂದಾಗಿ

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ ಮತ್ತು $\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\tan\dfrac{A}{2}=t$ ಆದರೆ $\sin A=\dfrac{2t}{1+t^2}$ ಮತ್ತು $\cos A=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(i) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕೋನ Aಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅಂದರೆ, $\sin A = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}}$

$$\left[\because 1=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{\dfrac{\sin^2(A/2)}{\cos^2(A/2)}+\dfrac{\cos^2(A/2)}{\cos^2(A/2)}}$$

ಅಥವಾ $\sin A = \frac{2\tan(A/2)}{\tan^2(A/2)+1}$

$$\therefore \ \mathbf{\sin A = \frac{2t}{1+t^2}}$$

(ii) ಹಾಗೆಯೇ

$\cos A = \cos^2(A/2)-\sin^2(A/2)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$= \frac{\cos^2(A/2)-\sin^2(A/2)}{1}$$

$$= \frac{\cos^2(A/2)-\sin^2(A/2)}{\cos^2(A/2)+\sin^2(A/2)}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2(A/2)}{\cos^2(A/2)}-\dfrac{\sin^2(A/2)}{\cos^2(A/2)}}{\dfrac{\cos^2(A/2)}{\cos^2(A/2)}+\dfrac{\sin^2(A/2)}{\cos^2(A/2)}}$$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{1-\tan^2(A/2)}{1+\tan^2(A/2)}$$

ಅಥವಾ $\cos A = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

2. sin3A cos3A ಮತ್ತು tan3A ಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆ

(i) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕೋನ A ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\begin{aligned}
\sin 3A &= \sin(2A + A) \\
&= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A \\
&= (2\sin A \cos A)\cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A \\
&= 2\sin A \cos^2 A + \sin A - 2\sin^3 A \\
&= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A \\
&= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\cos 3A &= \cos(2A + A) \\
&= \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A \\
&= (2\cos^2 A - 1)\cos A - (2\sin A \cos A)\sin A \\
&= 2\cos^3 A - \cos A - 2\sin^2 A \cos A \\
&= 2\cos^3 A - \cos A - 2(1-\cos^2 A)\cos A \\
&= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

(iii)
$$\begin{aligned}
\tan 3A &= \tan(2A + A) \\
&= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A}$$

$$= \frac{\frac{2\tan A + \tan A(1-\tan^2 A)}{1-\tan^2 A}}{\frac{1-\tan^2 A - 2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}}$$

$$\therefore \quad \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

3. $\sin 15°, \cos 22\frac{1}{2}°$ ಮತ್ತು $\tan 22\frac{1}{2}°$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು

(i) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಎಂದು $\theta = 15°$ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\sin^2 15° = \frac{1-\cos(2\times 15°)}{2}$$

$$= \frac{1-\cos 30°}{2} = \frac{1-\left(\sqrt{3}/2\right)}{2}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

ಅಂದರೆ, $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$$\left\{\because \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{3}-1\right]\right\}$$

$\cos\theta = 2\cos^2\theta/2 - 1$ ಅಥವಾ $\cos^2\theta/2 = \frac{1+\cos\theta}{2}$

ಇದರಲ್ಲಿ $\theta=45^\circ$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\cos 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+1/\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $\tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{45^\circ}{2} = \tan 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{1-\cos 45^\circ}}{\sqrt{1+\cos 45^\circ}} = \frac{\sqrt{1-1/\sqrt{2}}}{\sqrt{1+1/\sqrt{2}}}$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2}-1$$

4. $\tan\alpha = \frac{1}{4}$ ಆದರೆ $\tan 3\alpha$ ಮತ್ತು $\sin 3\alpha$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

$$= \frac{3\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{64}}{1-3\times\frac{1}{16}} = \frac{\frac{48-1}{64}}{\frac{16-3}{16}} = \frac{47}{52}$$

(iii) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{1}{4} \;\therefore \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} \;\therefore\; \sin 3\alpha = 3\times\frac{1}{\sqrt{17}} - 4\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^3$$

$$= \frac{3}{\sqrt{17}} - \frac{4}{17\sqrt{17}} = \frac{51-4}{17\sqrt{17}} = \frac{47}{17\sqrt{17}}$$

5. $\tan 67\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2}+1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಕೋನ $67\frac{1}{2}^\circ = \theta$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $135^\circ = 2\theta$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore\; \tan 135^\circ = \tan 2\theta$ ಅಂದರೆ, $-1 = \tan 2\theta$

ಅಥವಾ $-1=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ಅಥವಾ $-1+\tan^2\theta=2\tan\theta$

ಅಥವಾ $\tan^2\theta-2\tan\theta-1=0$

ಈಗ, $\tan\theta=a$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು

$a^2-2a-1=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$a=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}$ $a=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}}{2}$ ಅಥವಾ $a=1\pm\sqrt{2}$

$67\frac{1}{2}°$ ಕೋನವು ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ $\tan 67\frac{1}{2}°$ ಬೆಲೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore \tan 67\frac{1}{2}°=\sqrt{2}+1$

6. $\sin 18°$ ಮತ್ತು $\cos 36°$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x=18°$ ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$5x=90°$ ಅಥವಾ $2x+3x=90°$ ಅಥವಾ $2x=90°-3x$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\therefore \quad \sin 2x=\sin(90°-3x)=\cos 3x$$

$\sin 2x$ ಮತ್ತು $\cos 3x$ ಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ

$$2\sin x\cos x=4\cos^3 x-3\cos x$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು $\cos x$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$2\sin x=4\cos^2 x-3$$

ಅಥವಾ $2\sin x=4(1-\sin^2 x)-3$ ಅಥವಾ $4\sin^2 x+2\sin x-1=0$

ಇದರಲ್ಲಿ $y=\sin x$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$4y^2+2y-1=0$$

ಎಂಬ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad y=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

ಆದರೆ, $x=18^\circ$ ಕೋನವು I ಪಾದದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $y=\sin 18^\circ$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

(ii) $x=36^\circ$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$5x=180^\circ$ ಅಥವಾ $3x+2x=180^\circ$

ಅಥವಾ $3x=180^\circ-2x$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\therefore \quad \cos 3x = \cos(180^\circ-2x)$

ಅಥವಾ $4\cos^3 x - 3\cos x = -\cos 2x$

ಅಥವಾ $4\cos^3 x - 3\cos x = -\left[2\cos^2 x - 1\right]$

ಅಥವಾ $4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$

$\cos x = y$ ಎಂದಿರಲಿ

$\therefore 4y^3 + 2y^2 - 3y - 1 = 0$

ಅಂದರೆ $(y+1)(4y^2-2y-1)=0$

$\therefore \quad y=-1$ ಅಥವಾ $4y^2-2y-1=0$

ಈಗ, $\cos x=-1$ ಆದರೆ $x=180^\circ$ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$$\therefore y = \frac{2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{2\pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

36° ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ $\cos 36^\circ$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

7. $\tan\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡನೇ ಪದ

$$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta \qquad \ldots (1)$$

ಮೂರನೇ ಪದವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ

$$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta \qquad \ldots (2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸಾಧಿಸದಂತಾಯಿತು.

8. $\operatorname{cosec} A+2\operatorname{cosec} 2A=\sec A\cot\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$\operatorname{cosec} A+2\operatorname{cosec} 2A$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{2}{\sin 2A}$$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{2}{(2\sin A\cos A)}$$

$$=\frac{\cos A+1}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{2\cos^2(A/2)}{\left[2\sin(A/2)\cos(A/2)\right]\cos A}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\sec A$$

$$=\sec A\cot\frac{A}{2}$$

ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

9. $$\frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)} = \sin 2A$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $\theta=\frac{\pi}{4}-A$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\therefore \quad \frac{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2A\right) = \sin 2A .$$

10. $$\sec\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\sec 2\theta$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\sec\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$=\frac{1}{\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta\right]\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta\right]}$$

$$=\frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\left[\cos^2\theta-\sin^2\theta\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\cos 2\theta}=\frac{2}{\cos 2\theta} = 2\sec 2\theta$$

11. $\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)=\frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}}=\sec A+\tan A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

$$\tan\left[45^\circ+\frac{A}{2}\right]=\frac{\tan 45^\circ+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan 45^\circ\tan\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}}=\frac{1+\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}=\frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\left[\frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)^2}\right]^{1/2}$$

$$=\left[\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}\right]^{1/2}=\frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}}$$

ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ಪದವು ಎರಡನೇ ಪದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಈಗ ಎರಡನೇ ಪದವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

$$\left[\frac{1+\sin A}{1-\sin A}\right]^{1/2}=\left[\frac{1+\sin A}{1-\sin A}\times\frac{1+\sin A}{1+\sin A}\right]^{1/2}$$

$$=\left[\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}\right]^{1/2} \qquad =\left[\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}\right]^{1/2}$$

$$=\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A} \qquad =\sec A+\tan A$$

ಅಂದರೆ, ಎರಡನೇ ಪದವು ಮೂರನೇ ಪದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

12. $2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಕೆಳಕಂಡ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

ಅಥವಾ $\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$

ಹಾಗೆಯೇ $\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A$

$$\therefore \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A} \qquad \text{.... (1)}$$

ಮತ್ತು $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$ .... (2)

ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾದ (1) ಮತ್ತು (2) ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$$

ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

13. $2\tan\alpha=3\tan\beta$ ಆದರೆ

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{\frac{3}{2}\tan\beta - \tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan\beta\tan\beta} \qquad \left[\because \tan\alpha = \frac{3}{2}\tan\beta\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan^2\beta} = \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{2+\frac{3\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}$$

$$= \frac{\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta + 3\sin^2\beta}$$

$$= \frac{\sin\beta\cos\beta}{(1+\cos 2\beta)+3\left(\frac{1-\cos 2\beta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\beta\cos\beta}{5-\cos 2\beta} = \frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}$$

14. $4\sin^3\alpha\cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha\sin 3\alpha = 3\sin 4\alpha$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha$

$4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$ ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$LHS = (3\sin\alpha - \sin 3\alpha)\cos 3\alpha + (\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)\sin 3\alpha$

$= 3\sin\alpha\cos 3\alpha - \sin 3\alpha\cos 3\alpha + \cos 3\alpha\sin 3\alpha + 3\cos\alpha\sin 3\alpha$

$= 3[\cos 3\alpha\sin\alpha + \sin 3\alpha\cos\alpha]$

$= 3\sin(3\alpha+\alpha)$

$= 3\sin 4\alpha = \text{RHS}$

15. $\sin 16A = 16\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 8A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನಾವು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ

$RHS = 16\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 8A$

$$= 8[2\sin A\cos A]\cos 2A\cos 4A\cos 8A$$

$$= 8[\sin 2A\cos 2A\cos 4A\cos 8A]$$

$$[\because \sin 2A = 2\sin A\cos A]$$

$$= 4[2\sin 2A\cos 2A]\cos 4A\ \cos 8A$$

$$= 4[\sin 4A]\cos 4A\cos 8A$$

$$= 2[2\sin 4A\cos 4A]\cos 8A$$

$$= 2[\sin 8A]\cos 8A$$

$= \sin 16A\ =$ ಎಡಭಾಗ

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $A = 10°$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\frac{\sin 160°}{\sin 10°} = 16\cos 10°\cos 20°\cos 40°\cos 80°$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore 16\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80°$

$$= \frac{\sin(180°-20°)\cos 60°}{\sin 10°\cos 10°} = \frac{\sin 20°.\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sin 20°} = 1$$

16. $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಂದರೆ, $\sin 36°\sin 72°\sin 108°\sin 144° = \frac{5}{16}$ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

ಈಗ, $108° = 180° - 72°$

$\sin 108° = \sin(180° - 72°) = \sin 72°$

ಹಾಗೆಯೇ $144° = 180° - 36°$ $\therefore \sin 144° = \sin 36°$

$\therefore \quad \sin 36°\sin 72°\sin 108°\sin 144° = \sin^2 36°\sin^2 72°$

$$= (1-\cos^2 36°)(1-\cos^2 72°)$$

ಆದರೆ, $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ಮತ್ತು $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\therefore \sin 36^\circ \sin 72^\circ \sin 108^\circ \sin 144^\circ$

$$= \left[1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right]$$

$$= \left[1-\left(\frac{5+1+2\sqrt{5}}{16}\right)\right]\left[1-\left(\frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}\right)\right]$$

$$= \frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right)}{256}$$

$$= \frac{100-4\times 5}{256} = \frac{80}{256} = \frac{5}{16}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.6

1. (i) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ (ii) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ (iii) $\tan\alpha = \frac{5}{12}$

ಆದಾಗ $\cos 2\alpha$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\frac{\sin 3\theta}{1+2\cos 2\theta} = \sin\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\sin 15^\circ$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $5\sin^3\alpha\cos^3\alpha + 4\cos^3\alpha\sin 3\alpha = 3\sin 4\alpha$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1} = \frac{\tan 8A}{\tan 2A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $\tan\theta = \frac{b}{a}$ ಆದರೆ $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $2\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A} \pm \sqrt{1-\sin A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}$ ಆದರೆ $\tan\frac{\theta}{2} = \left[\frac{1+e}{1-e}\right]^{\frac{1}{2}} \tan\frac{u}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $\tan^2\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{a}{b}$ ಆದರೆ $\sin\theta=\frac{a-b}{a+b}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $\sec^2 A(1+\sec 2A)=2\sec 2A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $\cos 4\alpha=1-8\sin^2\alpha+8\sin^4\alpha$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $\tan 2A-\tan A=\frac{2\sin A}{\cos A+\cos 3A}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $2\cos x=a+\frac{1}{a}$ ಆದರೆ $2\cos 2x=a^2+\frac{1}{a^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $\tan 75^\circ-\tan 30^\circ-\tan 30^\circ\tan 75^\circ=1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. $\frac{\cos 3A+\sin 3A}{\cos A-\sin A}=1+2\sin 2A$ ತೋರಿಸಿ.

18. $\frac{1}{\tan 3\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\cot 3\theta+\cot\theta}=\cot 4\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

19. $\frac{1-\cos 3\theta}{1-\cos\theta}=(1+2\cos\theta)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. $\cos^6 A-\sin^6 A=\cos 2A\left[1-\frac{1}{4}\sin^2 2A\right]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. $\tan A\tan(60^\circ+A)\tan(120^\circ+A)=-\tan 3A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

22. $\frac{1+\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\tan\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

23. $\cos^3 2\theta+3\cos 2\theta=4(\cos^6\theta-\sin^6\theta)$

24. $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

25. $\cot 2\alpha=\cot\alpha-\operatorname{cosec} 2\alpha$

26. $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta$

27. $\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\sec 2\theta-\tan 2\theta$

28. $\frac{\sin 3A}{\sin A}+\frac{\cos 3A}{\cos A}=\frac{\sin 4A}{\sin A\cos A}=\frac{2\sin 4A}{\sin 2A}$

29. $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

30. $\sin 72°=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin 44°}+\sqrt{1-\sin 44°}\right]$

31. $2\tan 2A=\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}-\frac{(\cos A-\sin A)}{\cos A+\sin A}$

32. $\frac{\cos 3A}{2\cos 2A-1}=\cos A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಇದರಿಂದ $\cos 15°$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

33. $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15}=1$

34. $m\tan(\theta-30°)=n\tan(\theta+120°)$ ಆದರೆ $\cos 2\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

35. $\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos A}{b}$ ಆದರೆ $a\sin 2A+b\cos 2A=b$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

36. $\Delta^{le}\ ABC$ ಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

(i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(ii) $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$

(iii) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

37. $\tan A=\frac{-3}{4}$ ಆದರೆ, $\cos 2A$ ಮತ್ತು $\tan 2A$ ಯು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

38. $\sin 570°=\frac{-1}{2}$ ಆದರೆ, $\sin 285°$ ಮತ್ತು $\cos 285°$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9.4.4 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳು

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ)ಗಳನ್ನಾಗಿ ಅಪವರ್ತಿಸುವ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರಗಳು ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿವೆ :

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ .... (1)

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ .... (2)

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ .... (3)

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ .... (4)

ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ

(i) + (ii) : $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

(i) – (ii) : $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

(iii) + (iv) : $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

$$(iii)+(iv)\ :\ -2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ) ವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ.

ಈಗ, ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ

$A+B=C$ ಮತ್ತು $A-B=D$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ

$A=\dfrac{C+D}{2}$ ಮತ್ತು $B=\dfrac{C-D}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆಗ, ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$\sin C+\sin D=2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C+\cos D=-2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$$

$$=\ -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

ಈ ಸೂತ್ರಗಳು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ) ವನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು. ಈ ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು **ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\cos 70^\circ \cos 50^\circ$

(ii) $\sin 30^\circ \cos 20^\circ$

(iii) $2\cos 2\theta \sin\theta$

(iv) $\sin 11\theta \sin 3\theta$

(i) $2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\therefore \cos 70^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{2}\left[\cos(70^\circ+50^\circ)\cos(70^\circ-50^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 120^\circ + \cos 20^\circ] = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos 20^\circ\right)$$

(ii) $2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \sin 30^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\left[\sin(30^\circ+20^\circ)+\sin(30^\circ-20^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(50^\circ)+\sin(10^\circ)]$$

(iii) $2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore 2\cos 2\theta \sin\theta = \sin(2\theta+\theta)-\sin(2\theta-\theta) = \sin 3\theta - \sin\theta$$

(iv) $-2\sin A\sin B = \cos(A+B)-\cos(A-B)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \sin A\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]$$

$$\therefore \sin 11\theta \sin 3\theta = \frac{-1}{2}\left[\cos(11\theta+3\theta)-\cos(11\theta-3\theta)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos 14\theta - \cos 8\theta]$$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು) ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

(i) $\cos 58° - \cos 60°$

(ii) $\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$

(iii) $\cos 120° + \cos 10°$

(iv) $\cos 28° - \sin 20°$

(i) $\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

$\therefore \cos 58° - \cos 60° = -2\sin\frac{58°+60°}{2}\sin\frac{58°-60°}{2}$

$= -2\sin 59° \sin(-1°) \qquad = 2\sin 59° \sin 1° [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

(ii) $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \sin\frac{x}{2} - \sin\frac{y}{2} = 2\cos\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}{2}\sin\frac{\frac{x}{2}-\frac{y}{2}}{2} = 2\cos\frac{x+y}{4}\sin\frac{x-y}{4}$

(iii) $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$\therefore \cos 120° + \cos 10° = 2\cos\frac{120°+10°}{2}\cos\frac{120°-10°}{2}$

$= 2\cos 65° \cos 55°$

(iv) $\cos 28° - \sin 20°$ ನಲ್ಲಿ $\sin 20°$ ಯನ್ನು

$\sin 20° = \cos(90° - 20°) \qquad [\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta]$

$= \cos 70°$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\therefore \cos 28° - \sin 20° = \cos 28° - \cos 70°$

$$= -2\sin\frac{28^\circ+70^\circ}{2}\sin\frac{28^\circ-70^\circ}{2}$$

$$= -2\sin 49^\circ \sin(-21^\circ) = 2\sin 49^\circ \sin 21^\circ$$

3. $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}{\cos A\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A} = \tan 4A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A}$$

$$\frac{\left[2\sin\frac{3A+A}{2}.\cos\frac{3A-A}{2}\right]+\left[2\sin\frac{7A+5A}{2}.\cos\frac{7A-5A}{2}\right]}{\left[2\cos\frac{3A+A}{2}.\cos\frac{3A-A}{2}\right]+\left[2\cos\frac{7A+5A}{2}.\cos\frac{7A-5A}{2}\right]}$$

$$= \frac{2\sin 2A\cos A+2\sin 6A\cos A}{2\cos 2A\cos A+2\cos 6A\cos A}$$

$$= \frac{2\cos A(\sin 2A+\sin 6A)}{2\cos A(\cos 2A+\cos 6A)} = \frac{\sin 6A+\sin 2A}{\cos 6A+\cos 2A}$$

$$= \frac{2\sin\frac{6A+2A}{2}.\cos\frac{6A-2A}{2}}{2\cos\frac{6A+2A}{2}.\cos\frac{6A-2A}{2}} = \frac{2\sin 4A\cos 2A}{2\cos 4A\cos 2A}$$

$$= \tan 4A$$

4. $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin 6\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta} = \tan 2\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\sin 8\theta\cos\theta = \frac{1}{2}[\sin 9\theta+\sin 7\theta]$

$$\cos 3\theta\sin 6\theta = \frac{1}{2}[\sin 9\theta+\sin 3\theta]$$

$$\cos 2\theta\cos\theta = \frac{1}{2}[\cos 3\theta+\cos\theta]$$

$$\sin 3\theta \sin 4\theta = \frac{1}{2}[\cos 7\theta - \cos\theta]$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{\frac{1}{2}[\sin 9\theta + \sin 7\theta - \sin 9\theta - \sin 3\theta]}{\frac{1}{2}[\cos 3\theta + \cos\theta + \cos 7\theta - \cos\theta]}$$

$$= \frac{[\sin 7\theta - \sin 3\theta]}{[\cos 7\theta + \cos 3\theta]} \quad = \quad = \frac{2\cos 5\theta \sin 2\theta}{2\cos 5\theta \cos 2\theta} = \tan 2\theta.$$

5. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\gamma+\alpha)}{2}$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣ ಎಡಭಾಗ :

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[-2\sin\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\alpha-\beta-2\gamma}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[-2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{(-\beta-\gamma)}{2}\right]$$

$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} \qquad [\therefore \sin(-\theta) = -\sin\theta]$$

6. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$

$$= \cos 20° \cos 40 \frac{1}{2} \cos 80° \qquad \left[\because \cos 60° = \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos 20° \cos 40°) \cos 80°\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2} + \cos 20°\right) \cos 80°\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} \cos 80° + \cos 80° \cos 20°\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} \cos 80° + \frac{1}{2}\{\cos 100° + \cos 60°\}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos 80° + \cos 100° + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos 80° - \cos 80° + \frac{1}{2}\right] \qquad [\because \cos(180° - \theta) = -\cos\theta]$$

$$= \frac{1}{16}$$

7. $\frac{\cos 9° + \sin 9°}{\cos 9° - \sin 9°} = \tan 54°$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{\cos 9° + \cos 81°}{\cos 9° - \cos 81°} \qquad [\therefore \sin 9° = \sin(90° - 81°) = \cos 81°]$$

$$= \frac{2 \cos 45° \cos 36°}{2 \sin 45° \sin 36°} = \frac{2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 36°}{2. \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 36°} = \cot 36°$$

$$= \tan(90° - 36°) = \tan 54°$$

8. A, B, C ಗಳು ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯ ಕೋನಗಳಾದರೆ

$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \sin C$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C$

$= \frac{1}{2}(1-\cos 2A)+\frac{1}{2}(1-\cos 2B)-\frac{1}{2}(1-\cos 2C)$

$= \frac{1}{2}[1-\cos 2A-\cos 2B+\cos 2C]$

$= \frac{1}{2}\left[1-2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1\right]$

$\left[\because \cos 2C=\cos^2 C-1\right]$

$= \cos C\cos(A-B)+\cos^2 C \quad = \quad \cos C[\cos(A-B)+\cos C]$

$[\because A+B=180°-C, \cos(A+B)=-\cos C]$

$= \cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)] \quad = \quad \cos C[2\sin A\sin B]$

$= 2\sin A\sin B\cos C$, ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ.

9. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-[1+4\cos A\cos B\cos C]$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$

$= 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$= -2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$[\because \cos(A+B)=-\cos C]$

$= -1-2\cos C[\cos(A-B)-\cos C]$

$= -1-2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$$= -1-2\cos C[2\cos A\cos B]$$

$$= -1-4\cos A\cos B\cos C$$

$$= -[1+4\cos A\cos B\cos C]$$, ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ

10. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\text{LHS} \equiv \sin A+\sin B-\sin C$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin C$$

ಈಗ, $A+B+C=180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$A+B=180°-C$ ಅಥವಾ $\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$

$$\therefore \quad \sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$$

ಮತ್ತು $\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$LHS \quad \equiv \sin A+\sin B-\sin C$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$ ಬಲಭಾಗ

$$\because \sin\frac{C}{2}=\sin\left[\frac{180^\circ-(A+B)}{2}\right]$$

$$=\sin\left[90^\circ-\frac{(A+B)}{2}\right]$$

$$=\cos\frac{A+B}{2}$$

11. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)+\cos C\sin(A-B)=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\cos A\sin(B-C)=\cos[180^\circ-(B+C)]\sin(B-C)$

$$= -\cos(B+C)\sin(B-C) = -\frac{1}{2}[\sin 2B-\sin 2C] \quad \text{.... (1)}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$$\cos B\sin(C-A)=\frac{-1}{2}[\sin 2C-\sin 2A] \quad \text{.... (2)}$$

$$\cos C\sin(A-B)=-\frac{1}{2}[\sin 2A-\sin 2B]. \quad \text{.... (3)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗವು [(1), (2), (3) ಕೂಡುವುದರಿಂದ]

$$= -\frac{1}{2}[\sin 2B-\sin 2C+\sin 2C-\sin 2A+\sin 2A-\sin 2B]$$

$$= -\frac{1}{2}[0]=0$$ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ

12. $y\sin A=x\sin(2B+A)$ ಆದರೆ $(x+y)\cos(A+B)=(y-x)\cot B$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $y\sin A=x\sin(2B+A)$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$$\therefore \quad \frac{y}{x}=\frac{\sin(2B+A)}{\sin A}$$

ಆದ್ದರಿಂದ "ಕಾಂಪೋನೆಂಡೊ -ಎಟ್-ಡಿವಿಡೆಂಡೊ" ನಿಯಮದಿಂದ

$$\frac{y+x}{y-x}=\frac{\sin(2B+A)+\sin A}{\sin(2B+A)-\sin A}$$

$$=\frac{2\sin(A+B)\cos B}{2\sin(A+B)\sin B} = \tan(A+B)\cot B$$

$$=\frac{\cot B}{\cot(A+B)}$$

ಅಥವಾ $(x+y)\cot(A+B)=(y-x)\cot B$.

13. α ಮತ್ತು β ಎರಡು ಕೋನಗಳು $\alpha\cos\theta+b\sin\theta=c$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಗೊಳಿಸಿದರೆ

(i) $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

(ii) $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$ .... (1)

ಮತ್ತು $a\cos\beta+b\sin\beta=c$ .... (2)

(1) - (2) :

$$a(\cos\alpha-\cos\beta)+b(\sin\alpha-\sin\beta)=0$$

$$i.e \quad -2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

$$a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=b\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ ಅಥವಾ } \tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a}$$

(i) ಈಗ $\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

(ii) ಹಾಗೆಯೇ $\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2.\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

14. $2\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{9}=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$2\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}=\cos\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{9}-\frac{\pi}{9}\right)$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{9} \qquad \text{.... (1)}$$

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ $\cos\frac{\pi}{3}=+\frac{1}{2}$ .... (2)

(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಲೆಕ್ಕದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{2}+\cos\frac{5\pi}{9}$$

$$= \frac{-1}{2}+\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{2}+\cos\frac{5\pi}{9} \qquad \left[\because\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\right]$$

$$= \cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{9\pi}{9}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{9}}{2}\right) \qquad \left[\begin{array}{l}\because\cos C+\cos D\\ =2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\end{array}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{18} = 0 \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{2}=0\right]$$

15. $A+B+C=\pi$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}=4\cos\left(\frac{\pi+A}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi+B}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$LHS = 2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}-\sin\left[\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right] \qquad \left[\text{n}\cos\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$\left[\because A+B=\pi-C, \frac{A+B}{4}=\frac{\pi-C}{4}\right. \text{ ಮತ್ತು}$$

$$\left.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\right]$$

$$\therefore LHS \equiv 2\cos\frac{\pi-C}{4}\cos\left(\frac{A-B}{4}\right)-2\sin\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi-C}{4}\left[\cos\left(\frac{A-B}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{\pi-C}{4}\left[\cos\left(\frac{A-B}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A+B}{4}\right)\right]$$

$$\left[\begin{aligned}\because\sin\frac{\pi-C}{4}&=\sin\frac{A+B}{4}\\ &=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A+B}{4}\right)\end{aligned}\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi-C}{4}\right)\left[2\cos\left(\frac{\frac{A-B}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{A+B}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A-B}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{4}}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi - C}{4}\right)\left[2\cos\frac{\pi + A}{4}\cos\left(\frac{-\pi - B}{4}\right)\right]$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi - C}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi + A}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi + B}{4}\right)$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.7

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $2\cos 6\theta \sin 4\theta$ (ii) $2\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{5\theta}{2}$

   (iii) $\cos\theta\cos 7\theta$ (iv) $\cos 3\theta \sin 5\theta$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) $\sin 5x + \sin x$

   (ii) $\cos 4\theta - \cos 2\theta$

   (iii) $\cos 100° + \cos 140°$

   (iv) $\sin 31° + \cos 61°$

3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿ :

   $$\frac{\sin A + \sin 2A}{\cos A - \cos 2A} = \cot\frac{A}{2}$$

4. $\cos 2\theta \cos\frac{\theta}{2} - \cos 3\theta \cos\frac{9\theta}{2} = \sin 5\theta \sin\frac{5\theta}{2}$

5. $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta - \sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta - \sin 3\theta\sin 4\theta} = \tan 2\theta$

6. $\dfrac{(\cos\theta - \cos 3\theta)(\sin 8\theta + \sin 2\theta)}{(\sin 5\theta - \sin\theta)(\cos 4\theta - \cos 6\theta)} = 1$

7. $\sin 50° - \sin 70° + \sin 10° = 0$

8. $\cos(36° - A)\cos(36° + A) + \cos(54° + A)\cos(54° - A) = \cos 2A$

9. $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

10. $\sin 10° - \sin 70° + \cos 40° = 0$

11. $\cos(\alpha + \beta + \gamma)\cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma)$

$= 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

12. $4\sin\alpha\sin\left[\alpha + \frac{\pi}{3}\right]\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\alpha$

13. $\cos 52° + \cos 68° + \cos 172° = 0$

14. $\cos 15° - \sin 15° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $\cos A + \cos(120° + A) + \cos(120° - A) = 0$

16. $\alpha + \beta = \gamma$ ಆದರೆ

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

17. $\sin x + \sin y = a$ ಮತ್ತು $\cos x + \cos y = b$ ಆದರೆ

$\sin(x + y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$

19. $\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70° = \frac{1}{16}$

20. $\cos 10° \cos 50° \cos 70° = \frac{\sqrt{3}}{8}$

21. $\tan(A+30°)+\cot(A-30°)=\dfrac{1}{\sin 2A-\sin 60°}$

22. $\dfrac{\cos 17°+\sin 17°}{\cos 17°-\sin 17°}=\tan 62°$

23. $\tan 2A-\tan A=\dfrac{2\sin A}{\cos A+\cos 3A}$

24. $\sin\alpha=n\sin(\alpha+2\beta)$ ಆದರೆ, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1+n}{1-n}\tan\beta$

25. $\sin^2 12°+\sin^2 21°+\sin^2 39°+\sin^2 48°=1+\sin^2 9°+\sin^2 18°$

26. $\sin x+\sin y=a$ ಮತ್ತು $\cos x+x\cos y=b$ ಆದರೆ

$\cos(x+y)=\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

***ABC* ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :**

27. $\cos 2A-\cos 2B+\cos 2C=1-4\sin A\cos B\sin C$

28. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

29. $\sin^2\dfrac{A}{2}-\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1-2\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

30. $\cos A+\cos B-\cos C=-1+4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

31. $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A\sin B\cos C$

32. $\cos^2 2A+\cos^2 2B+\sin^2 2C=2+2\sin 2A\sin 2B\cos 2C$

33. $\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}=4\cos\dfrac{B+C}{4}\cos\dfrac{C+A}{4}\cos\dfrac{A+B}{4}$

34. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

35. $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ ಆದರೆ

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=1$$

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

36. $\frac{1+\sin A}{\cos A}+\frac{\cos B}{1-\sin B}=\frac{2\sin A-2\sin B}{\sin(A-B)+\cos A-\cos B}$

37. $\cos 5°-\sin 25°=\sin 35°$

38. $\sin 34°+\cos 64°=\cos 4°$

39. $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

40. $A+B+C=\pi$ ಆದರೆ

$$\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

41. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

42. $4\cos 18°\cos 42°\cos 72° = \cos 54°$

43. $\frac{\cos 5\theta}{\cos\theta}=2\cos 4\theta-2\cos 2\theta+1$

44. $\sin^2 A+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+A\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}$

45. $A+B+C=\pi$ ಆದರೆ

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-1=4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$

46. $\alpha+\beta+\gamma=0$ ಆದರೆ

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma-1=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

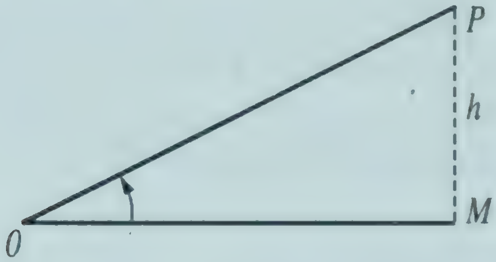
47. $\cos x+\cos y=\frac{1}{8}$ ಮತ್ತು $\sin x+\sin y=\frac{1}{4}$ ಆಗಿದ್ದರೆ

$\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ಮತ್ತು $\tan(x+y)$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9.5 ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ದೂರಗಳು

ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಅಳೆಯುವ ಬದಲು (ಅಥವಾ ಕಷ್ಟವಾದಾಗ) ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಇಂಥ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಪದಗಳ ಅರ್ಥಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ಉನ್ನತ ಕೋನ :- OM ಒಂದು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ. ವೀಕ್ಷಕನು O ಎಂಬಲ್ಲಿ ವಸ್ತು P ಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಾನೆ. ವಸ್ತು P ಯು OM ನಿಂದ ಅಂದರೆ ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಿಂದ h ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. O ಮತ್ತು P ಗಳ ಸೇರಿಸಿದಾಗ MOP ಕೋನವು ರಚಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. $\angle MOP$ ಕೋನವನ್ನು **ಉನ್ನತ ಕೋನ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 9.44).



ಚಿತ್ರ 9.44

ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ OM ಗಿಂತ ಮೇಲೆ P ಎಂಬಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆಗ OM ಮತ್ತು OP ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ $\angle MOP$ ಕೋನಕ್ಕೆ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಅವನತ ಕೋನ : ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ OM ಗಿಂತ ತಗ್ಗಿನಲ್ಲಿ Q ಎಂಬಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆಗ OM ಮತ್ತು OQ ಗಳಿಂದ ಏರ್ಪಟ್ಟ $\angle MOQ$ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅವನತ ಕೋನವೆಂದು ಹೆಸರು (ಚಿತ್ರ9.45). ಯಾವಾಗಲೂ ಉನ್ನತ ಕೋನ ಅಥವಾ ಅವನತ ಕೋನವು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕನ ಹಾಗೂ ವಸ್ತುವಿನ ನಡುವಿನ ರೇಖೆಗಳಿಂದ

ಏರ್ಪಟ್ಟ ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.45

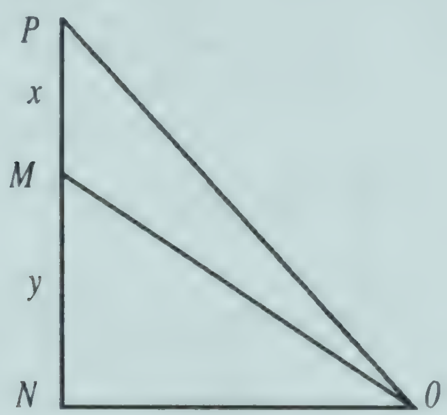
ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಒಂದು ನೇರವಾದ ಧ್ವಜ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಒಂದು ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಗಿದೆ. ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಶಿಖರದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45°. ವೀಕ್ಷಕನು ಕಟ್ಟಡದ ಬುಡದಿಂದ 20ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ. ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರ 9.46ನಲ್ಲಿ ಧ್ವಜ ಸ್ತಂಭ $PM = x$ ಮತ್ತು $MN =$ ಕಟ್ಟಡ $= y$ ಆಗಿರಲಿ.

$\angle NOP = 60^\circ$ $\angle NOM = 45^\circ$ $ON = 20$ ಮೀ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ PON ನಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 9.46

$$\tan \angle NOP = \frac{PN}{ON}$$

ಅಂದರೆ, $\tan 60^\circ = \frac{x+y}{20}$ ಅಥವಾ $\sqrt{3} = \frac{x+y}{20}$

$x + y = 20\sqrt{3}$ .... (1)

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ NOM ನಲ್ಲಿ

$$\tan \angle NOM = \tan 45° = \frac{MN}{ON}$$

ಅಂದರೆ, $1 = \frac{y}{20}$ ಅಥವಾ $y = 20$ ಮೀ. ... (2)

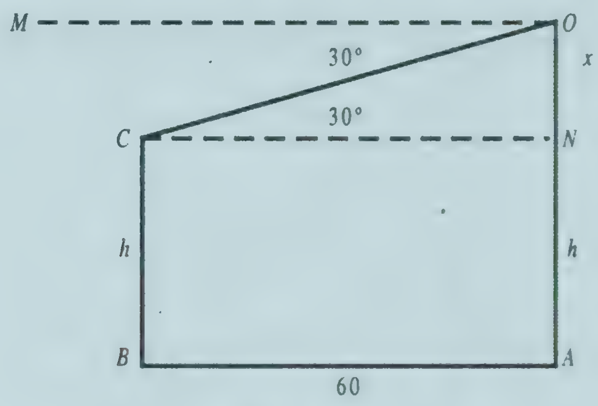
ಈಗ, (2) ನ್ನು (1)ರಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದಾಗ

$x + 20 = 20\sqrt{3}$

ಅಥವಾ $x = 20\sqrt{3} - 20 = 20(\sqrt{3} - 1)$

ಅಂದರೆ, ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ $20(\sqrt{3} - 1)$ ಮೀ.

2. ಎರಡು ಗೋಪುರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 60 ಮೀ. ಎರಡನೇ ಗೋಪುರದ ಶಿಖರದಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಗೋಪುರದ ಶಿಖರವನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ, ಅವನತ ಕೋನವು 30°. ಎರಡನೇ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ 150 ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ಮೊದಲನೇ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 9.47).



ಚಿತ್ರ 9.47

2ನೇ ಗೋಪುರ $OA = 150$ ಮೀ. ಚಿತ್ರ 9.47ರಲ್ಲಿ ಒಂದನೇ ಗೋಪುರ $BC = h$ ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ.

$BA = 60$ ಮೀ.

ಅವನತ ಕೋನ $\angle MOC = 30°$

ಈಗ $OA = AN + NO = h + x$.

ONC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$$\tan 30° = \frac{ON}{CN} \text{ ಅಂದರೆ, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{60} \quad [\because CN = AB = 60]$$

ಅಥವಾ $x = \frac{60}{\sqrt{3}}$

ಈಗ, $OA = h + x$

$$\therefore \quad 150 = h + \frac{60}{\sqrt{3}} \text{ ಅಥವಾ } 150 - \frac{60}{\sqrt{3}} = h$$

ಅಥವಾ $150 - \frac{60}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = h$ ಅಥವಾ $h = 150 - 20\sqrt{3}$

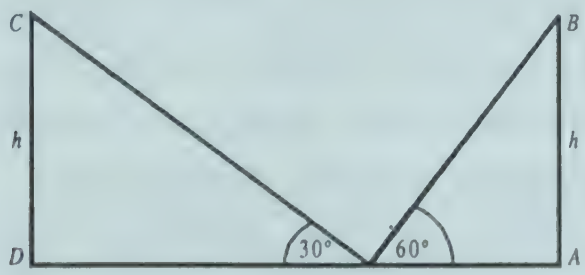
ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $\left(150 - 20\sqrt{3}\right)$ ಮೀ.

3. ಒಂದು ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಎತ್ತರದ ಎರಡು ಕಂಬಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಬುಡಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರಸ್ತೆಯು 100ಮೀ. ಅಗಲವಾಗಿದೆ. ಈ ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನು ನಿಂತು ನೋಡಿದಾಗ ಕಂಬಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು 60° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿದ್ದರೆ ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

AB ಮತ್ತು *CD* ಎರಡು ಕಂಬಗಳಾಗಿದ್ದು, $AB = DC = h$ ಆಗಿರಲಿ.

$AD = 100$ ಮೀ. ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$OA = x$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.48). ಆಗ $OD = 100 - x$



ಚಿತ್ರ 9.48

OAB ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$$\tan 60° = \frac{AB}{OA}$$

ಅಂದರೆ, $\sqrt{3}=\frac{h}{x}$

ಅಥವಾ $x\sqrt{3}=h$ ..... (1)

COD ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$$\tan 30°=\frac{CD}{OD}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{h}{100-x}$

ಅಥವಾ $100-x=h\sqrt{3}$ ..... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$100-x=x\sqrt{3}(\sqrt{3})$ ಅಥವಾ $100-x=3x \therefore x=25$ ಮೀ.

(1) ರಿಂದ, $h=x\sqrt{3} \therefore h=25\sqrt{3}$ ಮೀ.

ಅಂದರೆ, ಕಂಬದ ಎತ್ತರ $25\sqrt{3}$ ಮೀ. ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕನು ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಬದಿಂದ 25 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವನು.

ಅಭ್ಯಾಸ -9.8

1. ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತಿಯು 45° ಇದ್ದಾಗ 50 ಮೀ. ಎತ್ತರವಿರುವ ಕಟ್ಟಡವು ಎಷ್ಟು ದೂರವದರೆಗೆ ನೆರಳನ್ನು ಚಾಚುವುದು ?
2. ಒಂದು ಗೋಪುರವು ಬೆಟ್ಟದ ಮೇಲೆ ಇದೆ. ವೀಕ್ಷಕನು ಬೆಟ್ಟದ ಬುಡದಿಂದ 300 ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಾಗ ಗೋಪುರದ ಶಿಖರ ಮತ್ತು ಬುಡದ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು 60° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿರುವುವು. ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ವೀಕ್ಷಕನು ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವಾಗ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ಕಲ್ಲುಗಳ ಬದಿಯಿಂದ ಬೆಟ್ಟವನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಅದರ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 30° ಮತ್ತು 60° ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಬೆಟ್ಟದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಒಂದು ಗೋಪುರದ ತುದಿಯ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು x ಮತ್ತು y ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ (ಅದರ ಬುಡದ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ) ನೋಡಿದಾಗ ಆ ಕೋನಗಳು ಅನುಪೂರಕ

(ಕಾಂಪ್ಲಿಮೆಂಟರಿ) ಆಗಿವೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವು $\sqrt{xy}$ ಮೀ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ಒಂದು ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಮೇಲಿನಿಂದ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ (ಪೂರ್ವ ದಿಕ್ಕಿನ ನೇರದಲ್ಲಿ) ಅವನತ ಕೋನಗಳು 45° ಮತ್ತು 30°. ಎರಡು ಹಡಗುಗಳ ಮಧ್ಯದ ಅಂತರ 100 ಮೀ. ಇದ್ದರೆ ದೀಪಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಗಾಳಿಯಿಂದಾಗಿ ಒಂದು ಮರದ ಮೇಲಿನ ಭಾಗವು ತುಂಡಾಗಿ ಅದು ನೆಲಕ್ಕೆ ಬಾಗಿ 60° ಕೋನವನ್ನು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಮೂಡಿರುತ್ತದೆ. ಮರದ ಬುಡದಿಂದ ಅದು ಕೆಳಕ್ಕೆ ತುಂಡಾಗಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಬಿದ್ದಿರುವ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ 10 ಮೀಟರ್ ದೂರ ಇದ್ದರೆ ಮರವು ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರವಿತ್ತು ?

7. ಒಂದು ನೇರವಾದ ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಕ್ಕೆ (ಲಂಬವಾಗಿ) ವಿಮಾನ ಹಾರುತ್ತಿರುವಾಗ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ಕಲ್ಲುಗಳ ಅವನತ ಕೋನಗಳು α ಮತ್ತು β ಆಗಿ ಕಾಣುವುವು. ಆ ವಿಮಾನವು ರಸ್ತೆಯ ಮೇಲಕ್ಕೆ $\dfrac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. ಒಂದು ಕಂಬದ ನೆರಳು ಅದರ ಎತ್ತರದ $\sqrt{3}$ ರಷ್ಟು ಇದ್ದರೆ ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತಿಯು ಎಷ್ಟು ಇರುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತಿಯು 30° ಯಿಂದ 45° ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿದಾಗ ಒಂದು ಗೋಪುರದ ನೆರಳು 60 ಮೀ. ಜಾಸ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $30(1+\sqrt{3})$ ಮೀ. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. ನದಿಯಿಂದ h ಮೀ. ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಮೋಡವನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಅದರ ಉನ್ನತ ಕೋನವು β ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಪ್ರತಿಫಲಿತವನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ ಅದರ ಅವನತ ಕೋನವು α ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೋಡದ ಎತ್ತರ $h\sin(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)$ ಮೀ. ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9.6 ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಗ್ರಾಫಿನಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದು. x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳನ್ನು, y - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

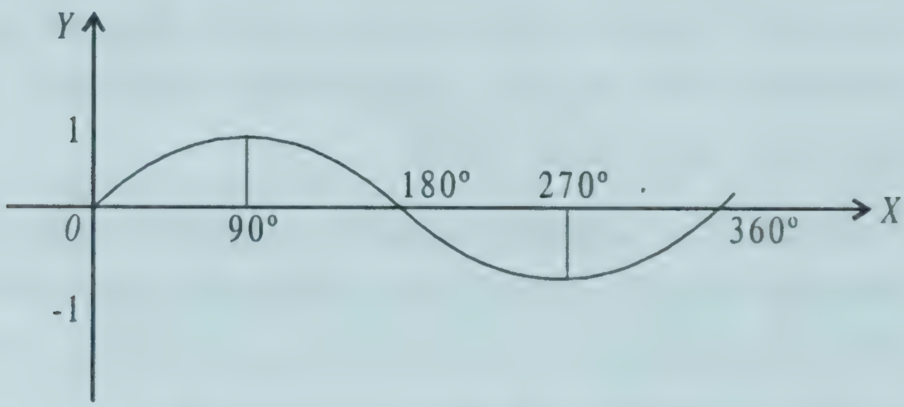
ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ಮುಂದೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ.

1. $y = \sin\theta$

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	0.5	0.7071	0.8660	1	0.8660	0.7071	0.5	0

θ	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\sin\theta$	-0.5	-0.8660	-1	-0.8660	-0.5°	0

ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θ ವು 0° ಮತ್ತು 90°ಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವಾಗ $\sin\theta$ ವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ 1ರ ತನಕ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θ ವು 90°ಯಿಂದ 180°ಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ $\sin\theta$ ದ ಬೆಲೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅದು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಬೆಲೆಯು 1 ರಿಂದ 0 ಬೆಲೆಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. 3ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θ 180°ಯಿಂದ 270° ವರೆಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ ವು $\sin\theta$ ವು -1 ರಿಂದ 0 ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $\sin\theta$ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಇದು 360° ಆದನಂತರ ನಕ್ಷೆಯು ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 9.49).



ಚಿತ್ರ 9.49

ಗಮನಿಸಿ :-

(i) $\sin\theta$ ಗರಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ + 1 ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ − 1 ;

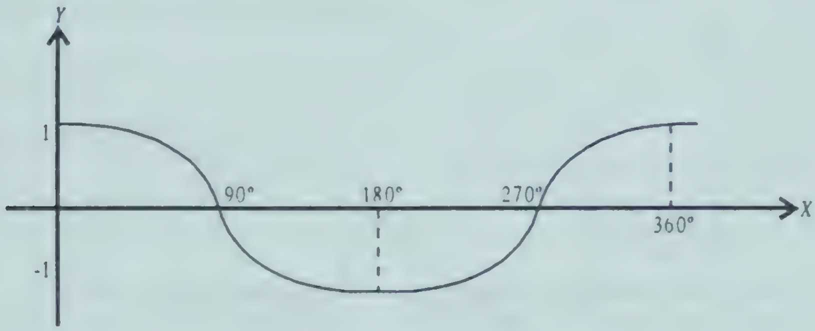
(ii) $\sin\theta$ ದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಇಲ್ಲ ; ಮತ್ತು

(iii) $\sin\theta$ ಒಂದು ಆವರ್ತಕ ಉತ್ಪನ್ನ ; ಇದರ ಅವಧಿ 2π

2. y=cosθ

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
cosθ	1	0.8660	0.7071	0.5	0	-0.5°	-0.7071	-0.8660	-1

θ	210°	225°	270°	300°	330°	360°
cosθ	-0.8660	-0.7071	0	0.5	0.8660	1



ಚಿತ್ರ 9.50

ಒಂದನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θ ವು 0° ಯಿಂದ 90° ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚಿದಾಗ cosθ ವು 1ರಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. 2ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 90° ಯಿಂದ 180° ಗೆ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ cosθ ವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಅದರ ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ -1 ವರೆಗೆ ಕಮ್ಮಿಯಾಗುತ್ತದೆ. 3ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θವು 180° ಯಿಂದ 270° ವರೆಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ cosθ ವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದು -1ರಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. 4ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θ ವು 270° ಯಿಂದ 360° ತನಕ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ cosθ ಬೆಲೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ cosθ ದ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಇದು 360° ಆದನಂತರ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 9.50).

ಗಮನಿಸಿ :-

(i) cosθ ಗರಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ +1 ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ –1 ;

(ii) cosθ ದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಇಲ್ಲ ; ಮತ್ತು

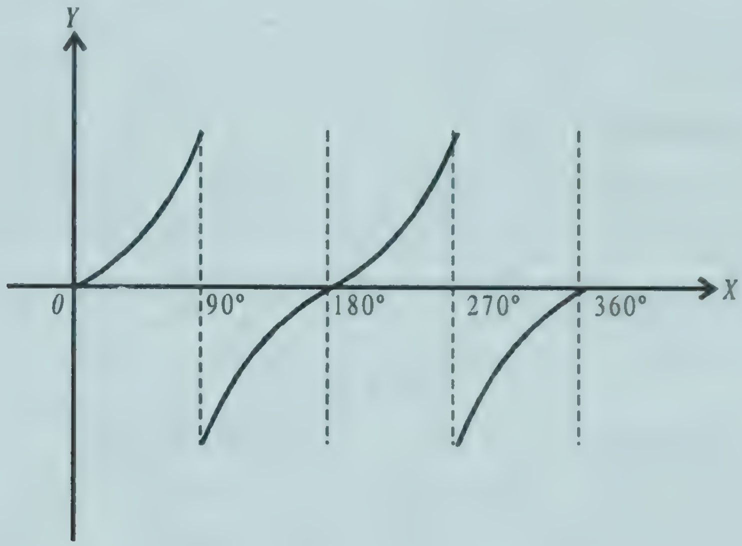
(iii) cosθ ಒಂದು ಆವರ್ತಕ ಉತ್ಪನ್ನ ; ಇದರ ಅವಧಿ 2π

3. y=tanq

θ	0	30°	45°	60°	89°	90°	91°	120°	135°	150°
tanθ	0	0.5774	1	1.732	57.29	∝	-57.29	-1.732	-1	-0.5774

θ	180°	210°	225°	269°	270°	271°	360°
tanθ	0	0.5774	1	57.29	∝	-57.29	0

θ ವು 0 ಇಂದ 90° ವರೆಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ $\tan\theta$ 0 ಇಂದ ∞ ವರೆಗೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಂತೆ θ ವು 89° ಯಿಂದ 90°ಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಅತೀ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಗ್ರಾಫಿನಲ್ಲಿ $\theta=90^\circ$ ಇದ್ದಾಗ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಇದೆ. θ ವು 2ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. θ ವು 180° ಇದ್ದಾಗ $\tan\theta$ ದ ಬೆಲೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. 3ನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿ θ ವು 180° ಯಿಂದ 270° ಯಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಜಾಸ್ತಿಯಾದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಗ್ರಾಫಿನಲ್ಲಿ ಪುನಃ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. θ ವು 360° ವರೆಗೆ $\tan\theta$ ದ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ 0 ವನ್ನು ತಲುಪುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 9.51

ಗಮನಿಸಿ :-

(i) $\tan\theta$ ದ ಗರಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ $+\infty$ ವರೆಗೆ ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ;

(ii) ಇದರ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ $\theta=90^\circ$ ಮತ್ತು $\theta=270^\circ$ ಇದ್ದಾಗ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಇದೆ ; ಮತ್ತು

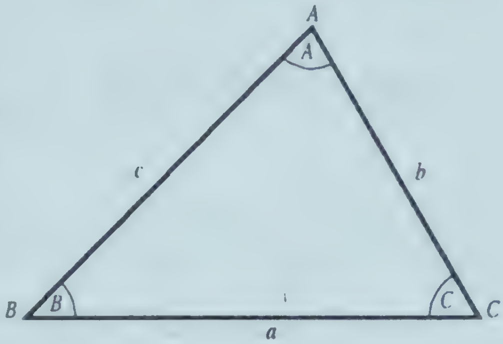
(iii) $\tan\theta$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಆವರ್ತಕವಾಗಿದ್ದು ಅವರ ಅವಧಿಯು π ಆಗಿದೆ.

9.7 ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಕೋನಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಭುಜಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಗೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಸಂಬಂಧಗಳಿವೆ. ಈ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ನಾವು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ತ್ರಿಕೋಣದ ಆರು ಮೂಲಾಂಶಗಳು

ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು A, B, C ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ a, b, c ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $BC = a, CA = b$ ಮತ್ತು $AB = a$ (ಚಿತ್ರ 9.52)



ಚಿತ್ರ 9.52

ತ್ರಿಕೋಣದ ಅರ್ಧ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು $\dfrac{a+b+c}{2} = s$ ಅಥವಾ $a+b+c = 2s$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

1. sine ನಿಯಮ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯಲ್ಲಿ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

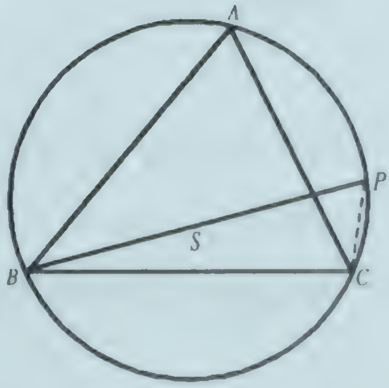
ಇಲ್ಲಿ R ತ್ರಿಕೋಣದ ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ

(i) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು **ಲಘುಕೋನ**ವಾಗಿರಲಿ. ತ್ರಿಕೋಣದ ಪರಿಕೇಂದ್ರವು s ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.53).

B ಮತ್ತು S ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ; BS ರೇಖೆಯು ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ; PC ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ. ಈಗ, $\angle BPC = \angle A$ ಮತ್ತು $\angle BCP = 90°$.

ಆದ್ದರಿಂದ,

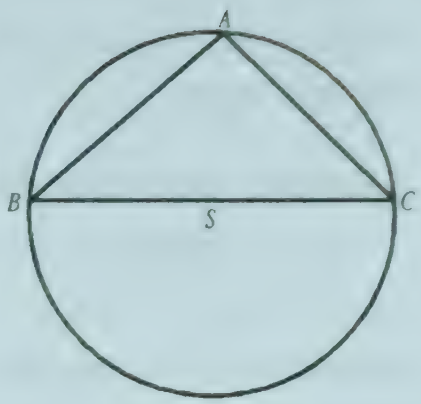
BPC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\sin \angle BPC = \dfrac{BC}{BP}$



ಚಿತ್ರ 9.53

ಅಥವಾ $\sin A = \frac{a}{2r}$ ಅಥವಾ $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .... (1)

(ii) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು **ಲಂಬಕೋನ**ವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.54).



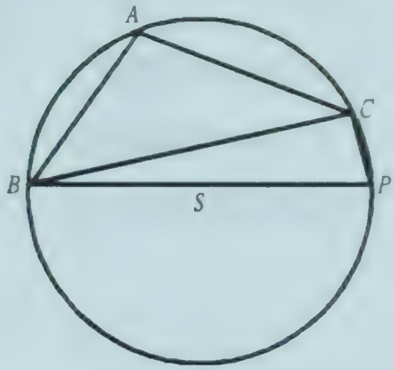
ಚಿತ್ರ 9.54

ಅಂದರೆ, $\angle A = 90°$. ಇಲ್ಲಿ $BC = a = 2R$

ಅಥವಾ $\frac{a}{1} = 2R$ ಅಥವಾ $\frac{a}{\sin 90°} = 2R$

$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$ .... (2)

(iii) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು **ಅಧಿಕಕೋನ**ವಾಗಿರಲಿ. B ಮತ್ತು S ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, BS ರೇಖೆಯು ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು P ಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. PC ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 9.55).



ಚಿತ್ರ 9.55

$ABPC$ ಯು ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle A + \angle BPC = 180°$ ಅಥವಾ $\angle BPC = 180° - A$.

BPC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ, $\angle BPC = 90°$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sin \angle BPC = \frac{BC}{BP}$

ಅಥವಾ $\sin(180° - A) = \frac{a}{2R}$

ಅಥವಾ $\sin A = \frac{a}{2R}$ ..... (3)

ಹೀಗೆಯೇ, (1) (2) (3) ಗಳಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ $\frac{a}{\sin A} = 2R$ ಮತ್ತು $\frac{c}{\sin C} = 2R$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

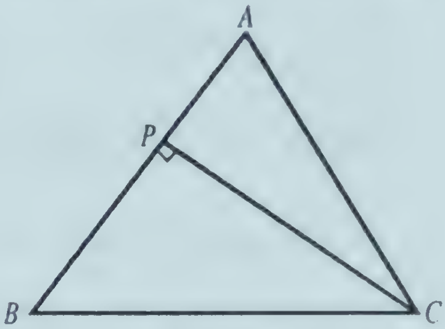
ಸೂಚನೆ :- ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಿಂದಾಗಿ $a=2R\sin A, b=2R\sin\theta$ ಮತ್ತು $c=2R\sin C$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

2. cosine ನಿಯಮ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯಲ್ಲಿ

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos A$$

(i) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ A ಯು ಒಂದು **ಲಘುಕೋನ**ವಾಗಿರಲಿ. CP ಯನ್ನು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 9.56).



ಚಿತ್ರ 9.56

BPC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $BC^2=BP^2+PC^2$

ಅಥವಾ $a^2=(BA-AP)^2+PC^2$

$$= BA^2+AP^2-2ABAP+PC^2$$

$$= BA^2+(AP^2+PC^2)-2BA.AP$$

$$= BA^2+AC^2-2BA.AP$$

($\because$ APC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $AC^2=AP^2+PC^2$)

ಅಂದರೆ, $a^2=c^2+b^2-2c.AP$ .... (1)

APC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\cos A=\dfrac{AP}{AC}$

ಅಥವಾ $AC\cos A=AP$ ಅಥವಾ $AP=b\cos A$ .... (2)

(1) ರಲ್ಲಿ (2)ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ $a^2=b^2+c^2-2b\cos A$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ A ಯು **ಲಂಬಕೋನ**ವಾಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.57).

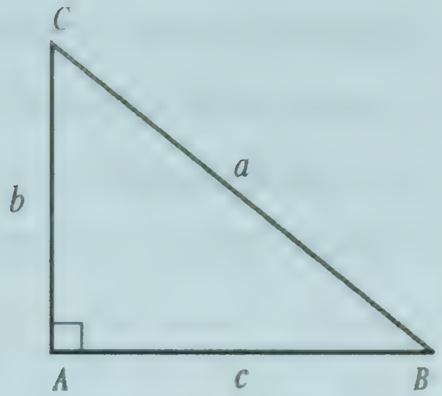
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

ಅಥವಾ $a^2 = c^2 + b^2$

ಅಥವಾ $a^2 = b^2 + c^2 - 0$

ಅಥವಾ $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos A$

$[\because \cos A = \cos 90° = 0]$



ಚಿತ್ರ 9.57

(iii) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ A ಯು **ಅಧಿಕಕೋನ**ವಾಗಿರಲಿ. CP ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BA ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 9.58)

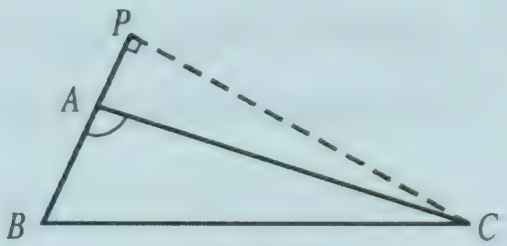
BCP ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿ

$BC^2 = BP^2 + PC^2$

ಅಥವಾ $a^2 = (BA + AP)^2 + PC^2$

$= BA^2 + AP^2 + 2BA.AP + PC^2$

$= BA^2 + \left(AP^2 + PC^2\right) + 2BA.AP$



ಚಿತ್ರ 9.58

ಅಂದರೆ, $a^2 = BA^2 + AC^2 + 2AB.AP$ .... (1)

$(\because$ APC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $AP^2 + PC^2 = AC^2)$

ಈಗ, CAP ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\angle CAP = 180° - A$

$$\therefore \cos \angle CAP = \frac{AP}{AC}$$

ಅಂದರೆ, $\cos(180° - A) = \frac{AP}{AC}$

ಅಥವಾ $-\cos A = \frac{AP}{AC}$

ಅಥವಾ $-\cos A = \frac{AP}{b}$

ಅಥವಾ $-b\cos A = AP$ .... (2)

ಈಗ, (1) ರಲ್ಲಿ (2)ನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$a^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA.b\cos A$$

ಅಥವಾ $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A$

ಅಥವಾ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ಎಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ಹಾಗೆಯೇ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

ಮತ್ತು $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ ಮತ್ತು } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

3. ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ ನಿಯಮ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋಣ ABCಯಲ್ಲಿ

$$\boxed{\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}}$$

(i) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ C ಯು ಒಂದು **ಲಘುಕೋನ**ವಾಗಿರಲಿ.

AP ಯನ್ನು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 9.59).

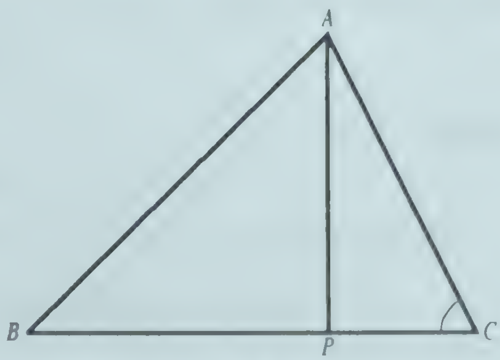
ಈಗ, ABP ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$\cos B = \frac{BP}{AB}$ ಅಥವಾ

$BP = AB\cos B = c\cos B$ .... (1)

ಹಾಗೆಯೇ ACP ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$$\cos C = \frac{PC}{AC}$$



ಚಿತ್ರ 9.59

ಅಥವಾ $PC = AC\cos C = b\cos C$ .... (2)

ಆದರೆ, $BC = BP + PC$ .... (3)

(3) ರಲ್ಲಿ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$a = c\cos B + b\cos C$ ಅಥವಾ

$a = b\cos C + c\cos B$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ C ಯು **ಲಂಬಕೋನ**ವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.60).

ಆಗ, ಆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

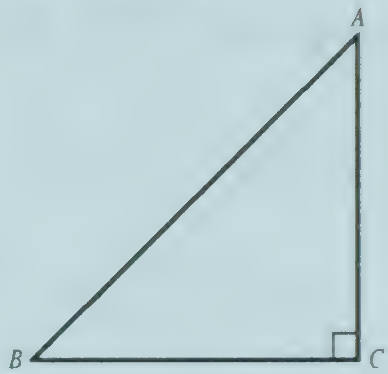
$\cos B = \frac{BC}{AB}$ ಅಥವಾ $BC = AB\cos B$

ಅಥವಾ $a = c\cos B$

ಅಥವಾ $a = c\cos B + 0$

ಅಥವಾ $a = c\cos B + b\cos C$

$[\because \cos C = \cos 90° = 0]$



ಚಿತ್ರ 9.60

(iii) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ C ಯು **ಅಧಿಕಕೋನ**ವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 9.61) AP ಯು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ, ABP ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

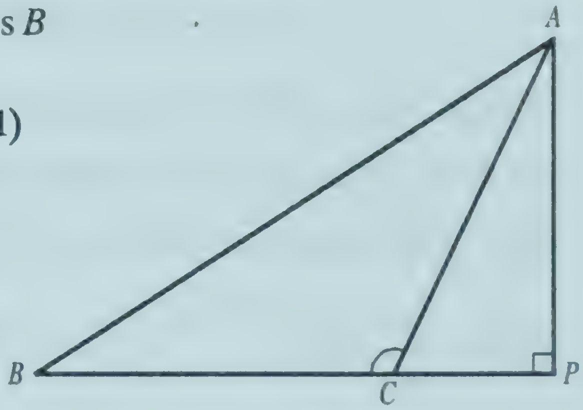
$\cos B = \frac{BP}{AB}$ ಅಥವಾ $BP = AB\cos B$

ಅಥವಾ $BP = c\cos B$ .... (1)

ACP ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$\cos\angle ACP = \cos(180° - C) = \frac{PC}{AC}$

ಅಥವಾ $-\cos C = \frac{PC}{AC}$



ಚಿತ್ರ 9.61

ಅಥವಾ $PC = -AC\cos C = -b\cos C$ .... (2)

ಆದರೆ, $BC = BP - CP$ .... (3)

(3) ರಲ್ಲಿ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

(3) ರಲ್ಲಿ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$a = c\cos B - (-b\cos C)$$

ಅಥವಾ $a = b\cos C + c\cos B$

ಆದುದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ $a = b\cos C + c\cos B$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, $b = c\cos A + a\cos C$

ಮತ್ತು $c = a\cos B + b\cos A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

4. ನೇಪಿಯರ್‌ನ tangent ಸೂತ್ರ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯಲ್ಲಿ

(i) $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$ (ii) $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$

ಮತ್ತು (iii) $\dfrac{c-a}{c+a} = \dfrac{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}$

ಮೊದಲನೇ ಸೂತ್ರದ ಎಡಭಾಗವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin A + 2R\sin B}$$ (sine ನಿಯಮದಿಂದ)

$$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$= \cot\left(\frac{A+B}{2}\right).\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$ ಸೂತ್ರದ ಬಲಭಾಗ.

ಸೂಚನೆ :- ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯಲ್ಲಿ $A + B + C = 180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{A+B}{2}=\frac{180°-C}{2}$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$$

ಇದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದಾಗ

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b}\cot\left(\frac{C}{2}\right)=\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

5. ತ್ರಿಕೋಣದ ಅರ್ಧಕೋನಗಳನ್ನು ಭುಜಗಳ ಮೂಲಕ ಬರೆಯುವುದು

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋಣ ABCಯಲ್ಲಿ

(i) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)=\left[\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\right]^{\frac{1}{2}}$

(ii) $\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\left[\frac{s(s-a)}{bc}\right]^{\frac{1}{2}}$

(iii) $\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\left[\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right]^{\frac{1}{2}}$.

(i) ನಮಗೆ $\cos A=1-2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)=-1-\cos A$$

$$= 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \qquad \text{(cosine ಸೂತ್ರದಿಂದ)}$$

$$= \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{[a+(b-c)][a-(b-c)]}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc} \qquad \text{.... (1)}$$

ಈಗ, $a+b+c=2s$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$a+b-c=2s-2c \quad \text{ಮತ್ತು} \quad a+c-b=2s-2b \qquad \text{.... (2)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ (1)ರಲ್ಲಿ (2)ರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2bc}$$

ಅಥವಾ $\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{(s-c)(s-b)}{bc}$

ಅಥವಾ $\sin\left(\frac{A}{2}\right)=\left(\frac{(s-c)(s-b)}{bc}\right)^{1/2}$

(ii) ನಮಗೆ $\cos A=2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)-1$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)=1+\cos A$$

$$= 1+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \quad \text{(cosine ನಿಯಮದಿಂದ)}$$

$$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s(2s-2a)}{2bc}$$

ಅಥವಾ $\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{s(s-a)}{bc}$

ಅಥವಾ $\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\left[\frac{s(s-a)}{bc}\right]^{1/2}$

(iii) ಈಗ, ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶ (i) ಮತ್ತು (ii)ರಿಂದಾಗಿ

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{(s-b)(s-c)/bc}}{\sqrt{s(s-a)/bc}}$$

ಅಂದರೆ, $\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\left[\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right]^{1/2}$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\sin\left(\frac{B}{2}\right)=\left[\frac{(s-c)(s-a)}{ca}\right]^{1/2},\cos\left(\frac{B}{2}\right)=\left[\frac{s(s-b)}{ca}\right]^{1/2}$$

$$\sin\left(\frac{C}{2}\right)=\left[\frac{(s-a)(s-b)}{ab}\right]^{1/2},\cos\left(\frac{C}{2}\right)=\left[\frac{s(s-c)}{ab}\right]^{1/2}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{B}{2}\right)=\left[\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}\right]^{1/2},\tan\left(\frac{C}{2}\right)=\left[\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}\right]^{1/2}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\frac{b^2-c^2}{a^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}=\frac{(2R\sin B)^2-(2R\sin C)^2}{(2R\sin A)^2}$$

(sine ನಿಯಮದಿಂದ)

$$=\frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 A}$$

$$=\frac{\sin(B-C)\sin(B+C)}{\sin^2 A}$$

$$=\frac{\sin(B-C)\sin A}{\sin^2 A} \qquad (\because\ \sin(B+C)=\sin A)$$

$$=\frac{\sin(B-C)}{\sin A}=\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}$$

2. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದ ಮೊದಲನೇ ಪದ

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}=\frac{(2R\sin A)^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}$$

$$=4R^2\sin A.\frac{\sin A\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}$$

$$=4R^2\sin A.\frac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}$$

$$[\because \sin A=\sin(B+C)]$$

$$=4R^2\sin A.\frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin B+\sin C}$$

$$= 4R^2 \sin A . \frac{(\sin B+\sin C)(\sin B-\sin C)}{\sin B+\sin C}$$

$$= 4R^2 \sin A(\sin B-\sin C) \quad \ldots (1)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ

$$\frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin C+\sin A}=4R^2 \sin B(\sin C-\sin A) \quad \ldots. (2)$$

ಮತ್ತು

$$\frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=4R^2 \sin C(\sin A-\sin B) \quad \ldots. (3)$$

ಈಗ (1) (2) ಮತ್ತು (3) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ

ಎಡಭಾಗದ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

$$= 4R^2 [(\sin A \sin B-\sin A \sin C)+(\sin B \sin C-\sin B \sin A)$$

$$+(\sin C \sin A-\sin C \sin B)]=0$$, ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗ

3. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ

$$2\left(a \sin^2 \frac{C}{2}+c \sin^2 \frac{A}{2}\right)=c+a-b$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$a\left(2\sin^2 \frac{C}{2}\right)+c\left(2\sin^2 \frac{A}{2}\right)$$

$$= a(1-\cos C)+c(1-\cos A)$$

$$= a+c-(a\cos C+c\cos A)$$

$$= a+c-b$$, ಬಲಭಾಗ

4. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ, a, b, c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ,

$\cot\left(\frac{A}{2}\right), \cot\left(\frac{B}{2}\right), \cot\left(\frac{C}{2}\right)$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ a, b, c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $-a, -b, -c$ ಸಮಾತಂರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಪದಗಳಿಗೆ $(a+b+c)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$(a+b+c)-a, (a+b+c)-b, (a+b+c)-c$ ಪದಗಳೂ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಅಂದರೆ, $b+c,\ c+a,\ a+b$ ಗಳೂ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶದಲ್ಲಿ $b = 2R\sin B$ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, $2R$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\sin B + \sin C,\ \sin C + \sin A,\ \sin A + \sin B$$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಅಂದರೆ,

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right),\ \sin\left(\frac{C+A}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)$$

ಮತ್ತು $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಅಂದರೆ, $\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]$,

$$\cos\frac{B}{2}\left[\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right]$$

ಮತ್ತು $\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳನ್ನು

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ಪದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\cot\frac{A}{2}\left[\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+1\right],$$

$$\cot\frac{B}{2}\left[\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}+1\right]$$

ಮತ್ತು $\cot\frac{C}{2}\left[\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}+1\right]$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಆಗ, ಮೂರು ಪದಗಳಿಂದಲೂ

$$\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$

ಪದವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಬರುವ

$$\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$$

ಪದಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

5. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $a\cos A = b\cos B$ ಆದರೆ, ತ್ರಿಕೋಣವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ಅಥವಾ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಈಗ, $a\cos A = b\cos B$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$(2R\sin A)\cos A = (2R\sin B)\cos B$

ಅಥವಾ $R\sin 2A = R\sin 2B$

ಅಥವಾ $\sin 2A - \sin 2B = 0$

$$\therefore \quad 2\cos(A+B)\sin(A-B) = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos(A+B) = 0$ ಅಥವಾ $\sin(A-B) = 0$

$\therefore \quad A+B = 90°$ ಅಥವಾ $A-B=0$ (ಅಂದರೆ, $A=B$)

$\therefore \quad C = 90°$ ಅಥವಾ $a = b$

ಅಂದರೆ, ABC ತ್ರಿಕೋಣವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣ ಅಥವಾ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\angle C = 60^\circ$ ಆದರೆ $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $\frac{(b+c)+(a+c)}{(a+c)(b+c)} = \frac{3}{a+b+c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಥವಾ $(b+a+2c)(a+b+c) = 3(a+c)(b+c)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಅಥವಾ $\left[ab + b^2 + bc + a^2 + ab + ac + 2ca + 2bc + 2c^2\right]$

$$= 3\left[ab + ac + bc + c^2\right]$$

ಅಂದರೆ, $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ .... (1)

ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, $C = 60^\circ$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿರುವುದರಿಂದ

$$\cos C = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

ಆದರೆ, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

(cosine ನಿಯಮದಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$

ಅಥವಾ $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ .... (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದಾಗಿ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

7. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $a \sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಈಗ, $\frac{a}{b+c}=\frac{2R\sin A}{2R\sin B+2R\sin C}$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} \qquad \left\{\because \sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}\right\}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

ಈಗ, $B-C=B-\{180°-(A+B)\}$

$$\therefore \quad \frac{B-C}{2}=\frac{B}{2}-90°+\frac{A}{2}+\frac{B}{2}.$$

$$\therefore \quad \frac{B-C}{2}=B+\frac{A}{2}-90°$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)=\cos\left[90°-\left(B+\frac{A}{2}\right)\right]$

$$=\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)$$

ಅಂದರೆ, $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)}$

$\therefore \quad a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$.

8. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\frac{b-c}{a}\frac{s(s-a)}{bc}+\frac{c-a}{b}\frac{s(s-b)}{ca}+\frac{a-b}{c}\frac{s(s-c)}{ab}$$

$$= \frac{s}{abc}\left[(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\right]$$

$$=$$

$$\frac{s}{abc}\left[s(b-c)-ab+ac+s(c-a)-bc+ba+s(a-b)-ac+bc\right]$$

$= \frac{s}{abc}\left[s(b-c+c-a+a-b)\right]=0$, ಬಲಭಾಗ.

9. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{a+b-c}\cot\frac{C}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{s(s-a)}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}+\frac{\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-c)(s-a)}}+\frac{\sqrt{s(s-c)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\left[s-a+s-b+s-c\right]}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\left[3s-(a+b+c)\right]}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad = \frac{\sqrt{s}\left[3s-2s\right]}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\, s\sqrt{s-c}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}\sqrt{s-c}}$$

$$= \frac{\sqrt{s(s-c)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}} \cdot \frac{s}{s-c}$$

$$= \cot\frac{C}{2}\frac{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}{\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$$

$$= \left(\cot\frac{C}{2}\right)\frac{a+b+c}{a+b-c},$$ ಬಲಭಾಗ.

10. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $C=90^\circ$ ಆದರೆ $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{c-b}}{\sqrt{c+b}}=\frac{a}{b+c}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{C-B}{2}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}=\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{C-B}{2}$$

$$= \frac{c-b}{c+b}\cot\left[\frac{90^\circ-90^\circ+A}{2}\right]$$

$$\left[\because\ C=90^\circ, B=90^\circ-A\right]$$

ಅಥವಾ $\tan\frac{A}{2}=\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{A}{2}$

ಅಥವಾ $\tan^2\frac{A}{2}=\frac{c-b}{c+b}$

$$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{c-b}}{\sqrt{c+b}} \qquad \text{.... (1)}$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin A}{1+\cos A} \qquad \text{.... (2)}$$

ಈಗ, $C=90^\circ$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\sin C=1$ .... (3)

$$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-B-90^\circ$$

ಅಥವಾ $A=90^\circ-B$

$$\therefore \quad \cos A=\cos(90^\circ-B)=\sin B \qquad \text{.... (4)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, (2) ರಲ್ಲಿ (3) ಮತ್ತು (4) ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}$$

ಅಂದರೆ, $\tan\frac{A}{2}=\frac{a}{c+b}$ .... (5)

($2R\sin A=a$ ಇತ್ಯಾದಿ ಬಳಸುವುದರಿಂದ)

(1) ಮತ್ತು (5) ರಿಂದ ತೋರಿಸಬೇಕಾದ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

11. Δ^{ie} ABC ಯಲ್ಲಿ $(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0$ ಎಂದು

ತೋರಿಸಿ. ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗ

$$(b-c)\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+(c-a)\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}+(a-b)\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\left[(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(c-s)\right]}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{\sqrt{s}\left[bs-ba-cs+ca+cs-cb-as+ab+as-ac-bs+bc\right]}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$= 0$$

12. $\Delta^{le}\ ABC$ ಯಲ್ಲಿ $\sum a^3\cos(B-C)=3abc$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\sum a^3\cos(B-C) = \sum a^2\, a\cos(B-C)$$

$$= \sum a^2(2R\sin A)\cos(B-C) \qquad [\because a=2R\sin A]$$

$$= R\sum a^2\, 2\sin(B-C)\cos(B-C)$$

$$[\because \sin A=\sin(B+C)]$$

$$= R\sum a^2(\sin 2B+\sin 2C)$$

$$= \sum a^2(2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C)$$

$$= \sum a^2(b\cos B+c\cos C) \qquad \left[\because \frac{b}{\sin B}=2R\right]$$

$$= a^2(b\cos B+c\cos C)+b^2(c\cos C+a\cos A)$$
$$+c^2(a\cos A+b\cos B)$$

$$= ab(a\cos B+b\cos A)+ac(a\cos C+c\cos A)+bc(b\cos C+c\cos B)$$

$$= ab(c)+ac(b)+bc(a) = 3abc$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.9

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋಣ ABCಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

1. $c\cos\frac{A-B}{2}=(a+b)\sin\frac{C}{2}$

2. $\frac{b-c}{b+c}\tan\frac{A}{2}-\frac{(b-c)}{(b+c)}\cot\frac{A}{2}=2\cot(B-C)$

3. $c^2=(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$

4. $a\cos A+b\cos B=c\cos(A-B)$

5. $a(\cos C-\cos B)=2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$

6. $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$ ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋಣವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. $\frac{\cos A}{a}=\frac{\cos B}{b}$ ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋಣವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋಣವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

9. $\cos B(b-c\cos A)=\cos C(c-b\cos A)$

10. $(c^2-a^2+b^2)\tan A=(a^2-b^2+c^2)\tan B=(b^2-c^2+a^2)\tan C$

11. $\cos A=\sin B-\cos C$ ಆದರೆ ತ್ರಿಕೋಣವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ a^2,b^2,c^2 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\cot A,\cot B,\cot C$ ಕೂಡ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $a,b.c$ ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $a^2\cos(B-C)+b^2\cos(C-A)+c^2\cos(A-B)=3abc$

15. $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$ ಆದರೆ a,b,c ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{s^2}{abc}$

17. $a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}+b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}+c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0$

18. $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)=0$

19. $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$

20. $\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6}$ ಮತ್ತು $\tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$ ಆದರೆ $\tan\frac{C}{2}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $a+c=2b$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

21. $\frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$

22. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

23. $b+c=2a$ ಆದರೆ $\cos\frac{B-C}{2}=2\sin\frac{A}{2}$

24. $\cos\theta=2\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ ಆದರೆ $a=(b+c)\sin\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

25. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ ADಯು ಮಧ್ಯರೇಖೆ ಆದರೆ $\cot\angle BAD-\cot B=2\cot A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

26. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$

27. $(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c\cot\frac{C}{2}$

28. $(a+b)\sin\theta=2\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}$ ಆದರೆ $a+b=c\sec\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

29. $a(\cos B+\cos C)=2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$

30. $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$ ಆದರೆ a, b, c ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

31. $a=13,\ b=14,\ c=15$ ಆದರೆ $\sin\frac{A}{2}$ ಮತ್ತು $\cos\frac{C}{2}$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

32. $a=5,\ b=13,\ c=12$ ಆದರೆ $\tan\frac{B}{4}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

33. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು 7, 5 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋಣದ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

34. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು $6+2\sqrt{3},\ 4\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $2\sqrt{6}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಕೋಣದ ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

35. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು $\sqrt{3}+1$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}-1$ ಆಗಿದ್ದು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನವು $60°$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಕೋಣದ ಉಳಿದೆರಡು ಕೋನಗಳು $105°$ ಮತ್ತು $15°$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9.8 ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋಣಕ್ಕೆ ಆರು ಮೂಲಾಂಶಗಳಿವೆ - 3 ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು 3 ಭುಜಗಳು. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣದ ಯಾವುದೇ 3 ಮೂಲಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಉಳಿದ 3 ಮೂಲಾಂಶ (ಪರಿಮಾಣ)ಗಳನ್ನು - ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ - ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು **"ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು"** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಐದು ಸಂದರ್ಭಗಳ ಪೈಕಿ ಮೊದಲನೇ ನಾಲ್ಕರಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು :

(i) ತ್ರಿಕೋಣದ 3 ಭುಜಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

(ii) ತ್ರಿಕೋಣದ 2 ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

(iii) ತ್ರಿಕೋಣದ 2 ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

(iv) ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ; ಮತ್ತು

(v) ಮೂರೂ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ.

ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ :

	0°	30°	45°	60°	90°	15°	75°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
cos	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$

9.8.1 ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಭುಜಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳಾದ a, b, c ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಕೋನಗಳಾದ A, B, C ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಮೊದಲು 2 ಕೋನಗಳನ್ನು cosine ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ ಮತ್ತು } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

ಉಳಿದ ಕೋನವನ್ನು $A + B + C = 180^\circ$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $a=2\sqrt{3},\ b=\sqrt{6}+\sqrt{2},\ c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{6+2+2\sqrt{12}+6+2-2\sqrt{12}-4\times 3}{2(6-2)}=\frac{1}{2}.$$

ಅಂದರೆ, $\cos A=\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore\quad A=60^\circ$

ಹಾಗೆಯೇ, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$$=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{6+2-2\sqrt{12}+12-6-2-2\sqrt{12}}{4\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{12-4\sqrt{12}}{4\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\frac{4\left(3-\sqrt{12}\right)}{4\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}$$

ಅಂದರೆ, $\cos B = -\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}$

ಈಗ, $\cos 75° = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \cos B = -\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}} = \cos\left(180° - 75°\right)$$

ಅಥವಾ $\cos B = \cos 105°$ ಅಂದರೆ, $B = 105°$.

$$\therefore \quad C = 180° - (A+B) = 180° - (60° + 105°)$$

ಅಂದರೆ, $C = 15°$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $A = 60°$, $B = 105°$ ಮತ್ತು $C = 15°$

2. $a = 2,\ b = \sqrt{6},\ c = \sqrt{3}-1$ ಆದರೆ $\Delta^{le}\ ABC$ ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{6 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 - 4}{2\left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} \qquad = \frac{6+3+1-2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)} \qquad = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ಅಂದರೆ, $\cos A=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad A=45^\circ$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \qquad = \frac{3+1-2\sqrt{3}+4-6}{2\left(\sqrt{3}-1\right)2}$$

$$= \frac{2-2\sqrt{3}}{4\left(\sqrt{3}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = -\frac{1}{2}$$

ಅಂದರೆ, $\cos B=-\frac{1}{2} \therefore \quad B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\therefore C=180^\circ-\left(A+B\right)=180^\circ-\left(45^\circ+120^\circ\right)=15^\circ.$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A=45^\circ, B=120^\circ, C=15^\circ$

9.8.2 ತ್ರಿಕೋಣದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯಲ್ಲಿ b,c,A ಅಥವಾ c,a,B ಆಥವಾ a,b,C ಕೊಟ್ಟಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಉಳಿದ ಪರಿಮಾಣಗಳಾದ a,B,C ಅಥವಾ b,C,A ಅಥವಾ c,A,B ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ.

ಒಂದನೇ ವಿಧಾನ : ಮೊದಲು cosine ಸೂತ್ರದಿಂದ ಮೂರನೇ ಭುಜವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಅನಂತರ cosine ಸೂತ್ರದಿಂದ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಮೂರನೇ ಕೋನವನ್ನು $A+B+C=180^\circ$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಎರಡನೇ ವಿಧಾನ : ಉದಾಹರಣೆಗೆ b,c,A ಕೊಟ್ಟಾಗ, $b<c$ ಆಗಿದ್ದರೆ ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಸೂತ್ರ

$$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

ಬಳಸಿ $\frac{B-C}{2}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಈಗ, $\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇದರಿಂದ B ಮತ್ತು C ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಅನಂತರ cosine ಸೂತ್ರದಿಂದ ಭುಜ a ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $a=2,\ c=\sqrt{3}-1,\ B=120°$ ಆದಾಗ ABC ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$$\therefore \quad b^2=\left(3+1-2\sqrt{3}\right)+4-2\left(\sqrt{3}-1\right)2(\cos 120°)$$

$$= 8-2\sqrt{3}-4\left(\sqrt{3}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \left[\because \cos 120°=-\frac{1}{2}\right]$$

$$= 8-2\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}-1\right)=6 \qquad \therefore \quad b=\sqrt{6}$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad = \frac{6+3+1-2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}$

$$= \frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

ಅಂದರೆ, $\cos A=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad A=45°$

ಆದ್ದರಿಂದ, $C=180°-(A+B)$

$$= 180°-(45°+120°)=15°$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $b=\sqrt{6},\ A=45°$ ಮತ್ತು $C=15°$

2. $a=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ ಮತ್ತು $C=60^\circ$ ಆದಾಗ, ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ಮತ್ತು $b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ $a<b$.

ಈಗ, ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\cot 30^\circ=\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

ಅಥವಾ $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}\sqrt{3}=\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$ ಅಥವಾ $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=1$

$\therefore \quad \frac{A-B}{2}=45^\circ$ ಅಥವಾ $A-B=90^\circ$ .... (1)

ಈಗ, $A+B=180^\circ-C=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $A=105^\circ$ ಮತ್ತು $B=15^\circ$ .... (2)

ಈಗ, ಉಳಿದಿರುವ ಪರಿಮಾಣವಾದ ಭುಜ c ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು sine ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ :

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \quad c=\frac{b}{\sin B}.\sin C=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.\frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\frac{\left(\sqrt{3}/2\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)/2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ $A=105°, B=15°$ ಮತ್ತು $c=\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.8.3 ತ್ರಿಕೋಣದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಳ್ಳದಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ "ಸಂದಿಗ್ಧ" ಅಥವಾ "ದ್ವಂದ್ವ" ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಉಂಟಾಗಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, b, c, B ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ನಾವು C ಕೋನವನ್ನು sine ನಿಯಮದಿಂದ ಪಡೆಬ್ಬಹುದು :

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \qquad \therefore \quad \sin C = \frac{c \sin B}{b}$$

(i) $b < c \sin B$ ಆದಾಗ $\sin C > 1$ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವಾಗಲೂ $\sin C \leq 1$

(ii) $b = c \sin B$ ಆದಾಗ $\sin C = 1$, ಅಂದರೆ $C = 90°$. ಆಗ ಒಂದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

(iii) $b > c \sin B$ ಆದಾಗ $\sin C < 1$ ಆಗ C ಮತ್ತು $180 - C$ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಲಘು ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಅಧಿಕ ಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $c=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $B=45°$ ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $b < c$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. sine ನಿಯಮದಿಂದ

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

ಅಥವಾ $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \therefore \; C=60^\circ$ ಅಥವಾ $C=120^\circ$

(i) $C=60^\circ$ ಆದಾಗ, $A=180^\circ-(B+C)$

ಅಂದರೆ, $A=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)$

ಅಥವಾ $A=75^\circ$ $\qquad$ ಈಗ, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{a}{\sin 75^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$ ಅಥವಾ $\dfrac{a}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

ಅಥವಾ $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

(ii) $C=120^\circ$ ಆದಾಗ $A=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)$ ಅಥವಾ $A=15^\circ$.

ಈಗ, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{a}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

$$\therefore \quad \frac{a}{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

ಅಥವಾ $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

ಆದ್ದರಿಂದ ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು :

(i) $a=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$, $A=75^\circ$ ಮತ್ತು $C=60^\circ$

(ii) $a=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, $A=15^\circ$ ಮತ್ತು $C=120^\circ$

2. $b=2, c=\sqrt{6}$ ಮತ್ತು $C=120^\circ$ ಆದಾಗ ABC ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $\sqrt{6}>2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $c>b$
ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜವು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಈಗ, $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

ಅಂದರೆ, $\frac{2}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}$

ಅಥವಾ $\frac{2}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}/2}$

ಅಥವಾ $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad B=45^\circ$

ಈಗ, $A=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)$

ಅಥವಾ $A=15^\circ$

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

ಅಂದರೆ, $\frac{a}{\sin 15^\circ}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$

$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ಅಥವಾ $\therefore \quad a=\sqrt{3}-1$

ಆದ್ದರಿಂದ $a=\sqrt{3}-1, A=15^\circ$ ಮತ್ತು $B=45^\circ$.

9.8.4 ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ

ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ a, B, C ಕೊಟ್ಟಾಗ 3ನೇ ಕೋನವನ್ನು $A+B+C=180^\circ$ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಹಾಗೂ sine ಸೂತ್ರ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ ದಿಂದ b ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ c ಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $B=120^\circ, A=45^\circ$ ಮತ್ತು $a=2$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಈಗ, $C=180^\circ-(A+B)$

$$=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=15^\circ$$

ಹಾಗೆಯೇ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

ಅಂದರೆ, $\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 120^\circ}$

ಅಥವಾ $\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

ಅಥವಾ $b=\sqrt{6}$

ಹಾಗೆಯೇ $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

ಅಂದರೆ, $\frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}=\frac{c}{\sin 15^\circ}$

ಅಥವಾ $\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$ $\therefore\ c=\sqrt{3}-1$

ಆದ್ದರಿಂದ, $b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}-1$ ಮತ್ತು $C=15^\circ$.

2. $A=45^\circ, B=60^\circ$ ಮತ್ತು $a=6$ ಆದಾಗ ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಈಗ, $C=180^\circ-(A+B)$

$$=\ 180^\circ-(105^\circ)$$

ಅಂದರೆ, $C = 75^\circ$.

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$

ಅಂದರೇ, $\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$

$\therefore$ ಅಥವಾ $\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ಅಥವಾ $\frac{2b}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2}$

ಅಥವಾ $b = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$.

ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ sine ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{c}{\sin 75^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$

ಅಥವಾ $\frac{c}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$\therefore \quad c = 3\left(\sqrt{3}+1\right)$$

ಆದ್ದರಿಂದ $b = 3\sqrt{6},\ c = 3\left(\sqrt{3}+1\right)$ ಮತ್ತು $C = 75^\circ$.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.10

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :

1. $a = 5, b = 5\sqrt{3}, c = 5$
2. $a = 2, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} - 1$
3. $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}, b = 2\sqrt{2}, c = 2\sqrt{3}$
4. $a = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}, b = \sqrt{2}, c = 3 - \sqrt{3}$

5. $a=1, b=\sqrt{6}+\sqrt{2}, c=2+\sqrt{3}$

6. $a=4, b=4\sqrt{3}, c=4$

7. $a=2, b=\sqrt{2}, c=\sqrt{3}+1$

8. $a=2\sqrt{3}, b=\sqrt{6}+\sqrt{2}, c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

9. $a=2, c=\sqrt{3}-1, B=120°$

10. $a=2, b=\sqrt{3}+1, C=60°$

11. $A=105°, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}-1$

12. $a=2, B=75°, c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

13. $A=30°, b=2, c=\sqrt{3}+1$

14. $a=2, B=120°, C=30°$

15. $b=2, c=\sqrt{6}-\sqrt{2}, A=135°$

16. $a=3-\sqrt{3}, b=3+\sqrt{3}, A=15°$

17. $b=5, c=6, B=60°$

18. $a=\sqrt{3}-1, b=\sqrt{3}+1, B=75°$

19. $a=2, b=\sqrt{6}+\sqrt{2}, B=150°$

20. $B=30°, b=2, c=2\sqrt{3}$

21. $A=30°, a=\sqrt{2}, b=2$

22. $A=120°, a=\sqrt{6}, b=2$

23. $A=\sqrt{2}, b=4, A=30°$

24. $A=30°, B=135°, c=\sqrt{3}-1$

25. $A=45°, B=75°, c=10$

26. $a=2, B=120°, C=30°$

27. $A=45°,\ B=60°,\ b=\sqrt{6}$

28. $B=105°, C=45°, a=2$

ಅಧ್ಯಾಯ 10

ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

ಹದಿನಾರನೆಯ ಶತಮಾನಕ್ಕೂ ಮೊದಲು ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೇ ಅಭ್ಯಸಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ನಂತರದಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಚ್ 31,1596 ರಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದ ಫ್ರಾನ್ಸ್ ದೇಶದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ರೆನೆ ಡೆಕಾರ್ಟೆ (Rene Descartes) ಅವರು ತಮ್ಮ 23ನೇ ವರ್ಷದ ಪ್ರಾಯದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಹೇಗೆ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟರು. ಈ ಹೊಸ ಬಗೆಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು "ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ" ವೆಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಯಿತು. ಇಂದಿಗೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಹಾಗು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಈ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಅತ್ಯಂತ ಉಪಯುಕ್ತ ಮಾಹಿತಿಯಾಗಿದೆ. ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ, ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತಗಳ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಡೆ ಕಾರ್ಟೆ (Descartes) ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು "ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆ" ಎಂಬ ಕರೆಯುವುದಿದೆ.

10.1 ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

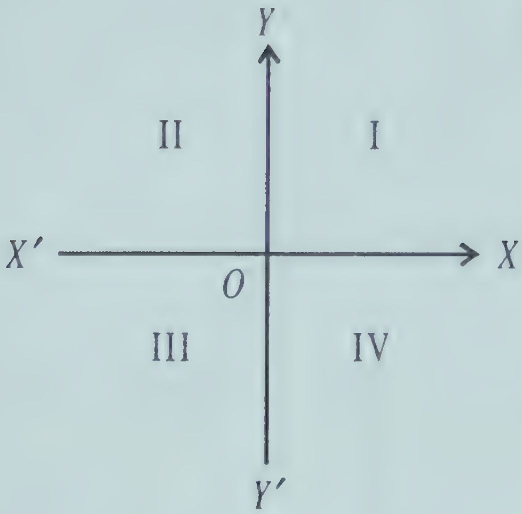
ಯಾವುದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದ್ಧತಿಯು ಒಂದು ಸಾಧನ.

XOX' ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು x - **ಅಕ್ಷವೆಂದೂ,**

YOY' ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು y - **ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.**

ಈ ಎರೆಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು O **ಅನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳು ಒಂದು ಸಮತಲವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ. XOY ಸಮತಲಭಾಗವನ್ನು I ಪಾದವೆಂದು, YOX' ಭಾಗವನ್ನು II ಪಾದವೆಂದು, $X'OY'$ ಭಾಗವನ್ನು III ಪಾದವೆಂದು ಮತ್ತು YOX' ಭಾಗವನ್ನು IV ಪಾದವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 10.1 ನೋಡಿ). ಈ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮತಲವನ್ನು "ಕಾರ್ಟಿಸೀಯನ್ ಸಮತಲ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ P ಎಂಬುದು ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PM ಮತ್ತು PN ಗಳನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ, y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. $PN = x$ ಅನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ **ಕೋಟಿಯೆಂದು,** $PM = y$ ಅನ್ನು P



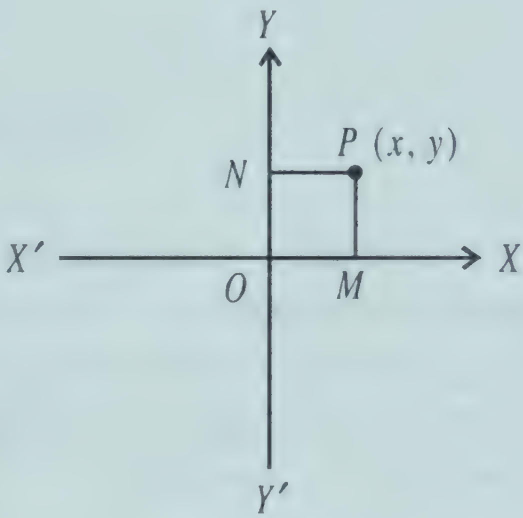
ಚಿತ್ರ 10.1

ಬಿಂದುವಿನ **ಭುಜವೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವೆರಡನ್ನೂ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಅಂದರೆ, (x, y) ಅನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 10.2 ನೋಡಿ). ಇದನ್ನು $P \equiv (x, y)$ ಅಥವಾ $P\ (x, y)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು.

$PN = x$, ಕೋಟಿ (x - ನಿರ್ದೇಶಕ)

$PM = y$, ಭುಜ (y - ನಿರ್ದೇಶಕ)

ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (0, 0) ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.



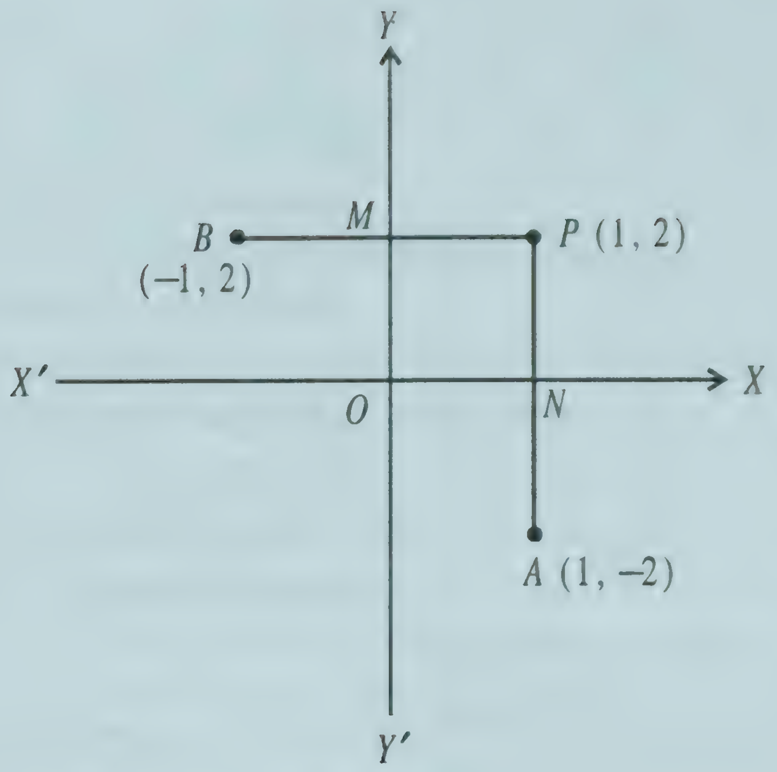
ಚಿತ್ರ 10.2

ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು y-ಅಕ್ಷದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅದರ x-ನಿರ್ದೇಶಕವು ಧನವಾಗಿಯೂ, ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಋಣವಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು. ಹಾಗೆಯೇ, ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು x- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅದರ y- ನಿರ್ದೇಶಕವು ಧನವಾಗಿಯೂ, ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಋಣವಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಸೂಚನೆ : x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಭುಜವು ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಕೋಟಿಯೂ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಕ್ರಮವಾಗಿ $y = 0$ ಮತ್ತು $x = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರತಿಫಲನ

ಉದಾಹರಣೆಗೆ XOY ಸಮತಲದಲ್ಲಿ $P\ (1, 2)$ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದರೆ, IVನೇ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ A ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವಿನ x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಫಲನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು (ಚಿತ್ರ 10.3ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).



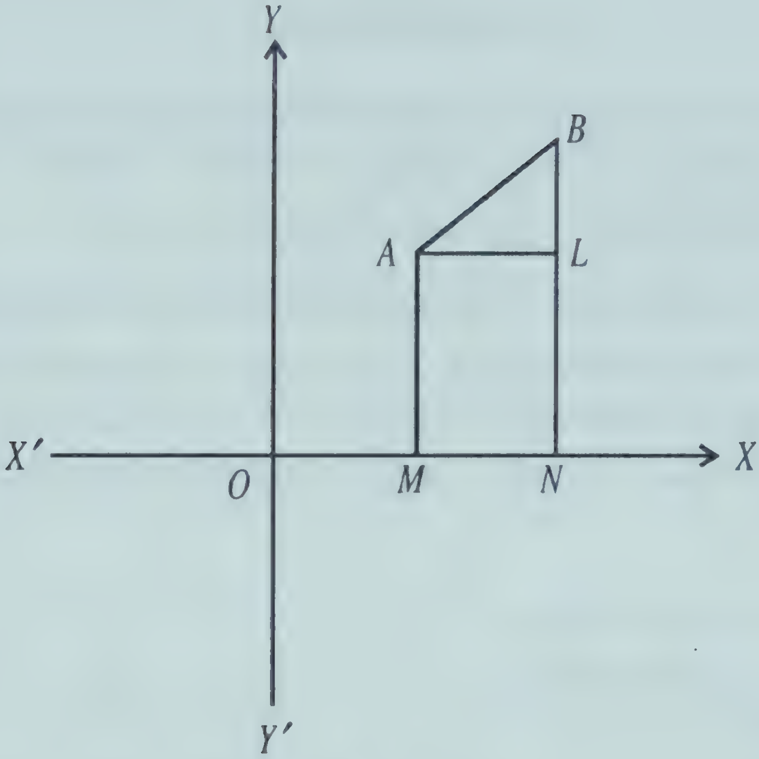
ಚಿತ್ರ **10.3**

AP ಸರಳರೇಖೆಯು *X* ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದು $PN = AN$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ *A* ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(1, -2)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ *B* ಬಿಂದುವನ್ನು *y*-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ *P* ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರತಿಫಲನವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ *BP* ಸರಳರೇಖೆಯು *Y* ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದು $PM = BM$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. *B* ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(-1, 2)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

10.2.1 ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. *A* ಮತ್ತು *B* ಬಿಂದುಗಳಿಂದ *AM* ಮತ್ತು *BN* ಗಳನ್ನು *x*-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ, *AL* ಅನ್ನು *BN* ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 10.4). ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವಂತೆ *ABL* ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣವಾದ್ದರಿಂದ, ಪೈಥಾಗೊರೆಸ್‌ನ (ಬೌಧಾಯನ) ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ

$$AB^2 = AL^2 + BL^2 \qquad \ldots(1)$$



ಚಿತ್ರ 10.4

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ,

$$AL = MN = ON - OM$$

$$= x_2 - x_1 \quad \text{.... (2)}$$

ಹಾಗೆಯೇ, $BL = BN - LN$

$$= BN - AM$$

$$= y_2 - y_1 \quad \text{.... (3)}$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ (2) ಮತ್ತು (3) ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ.

ಅಥವಾ $\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು **ದೂರದ ಸೂತ್ರ**ವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು $P(x, y)$ ನ ದೂರವು $\sqrt{x^2 + y^2}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

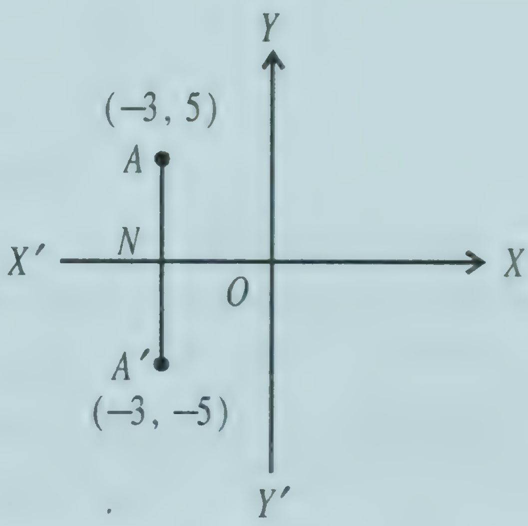
1. $P(1,0)$ ಮತ್ತು $Q(2,3)$ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ದೂರದ ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವು $PQ = \sqrt{(1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

2. $A(-3,5)$ ಬಿಂದುವಿನ x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಫಲನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

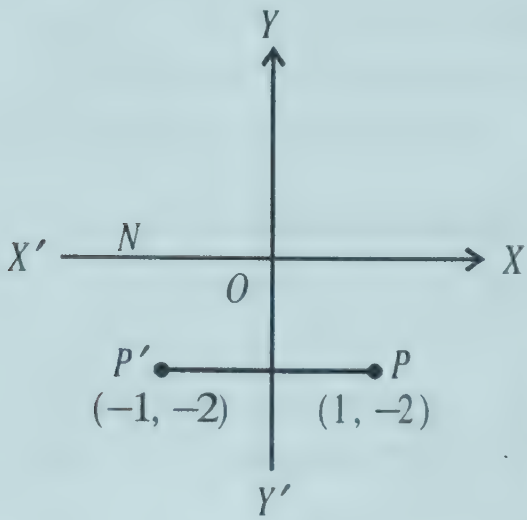
ಚಿತ್ರ 10.5ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ A' ಬಿಂದುವು A ಬಿಂದುವಿನ x-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಫಲನವೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದು. ಏಕೆಂದರೆ, $AN = A'N$ ಮತ್ತು $AA' \perp XOX'$ ಅಂದರೆ, A ಮತ್ತು A' ಬಿಂದುಗಳು x-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $A' \equiv (-3,-5)$.

3. $P(1,-2)$ ಬಿಂದುವಿನ y-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಫಲನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರ 10.6ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ P' ಬಿಂದುವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರತಿಫಲನವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು



ಚಿತ್ರ 10.5



ಚಿತ್ರ 10.6

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ $PP' \perp y$-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು $PM = PM'$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P' ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು $(-1, -2)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು; ಅಂದರೆ $P' \equiv (-1,-2)$.

4. $A(-8,-2)$ ಮತ್ತು $B(-1,-5)$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ದೂರದ ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$AB = \sqrt{(-8+1)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}\,.$$

5. A (3, 4), B (7, 8) ಮತ್ತು C (–3, –2) ಬಿಂದುಗಳು ಏಕ ರೇಖಬದ್ಧವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

ಮೊದಲು AB, BC ಮತ್ತು CA ಇವುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಂತರ ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಹೇಗೆ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಂಬಂಧಿತವೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

$$AB = \sqrt{(3-7)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(7+3)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$CA = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

ಮೇಲಿನ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ತಿಳಿದುಬರುವ ಅಂಶವೆಂದರೆ,

$AB + CA = BC$, ಆದ್ದರಿಂದ A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

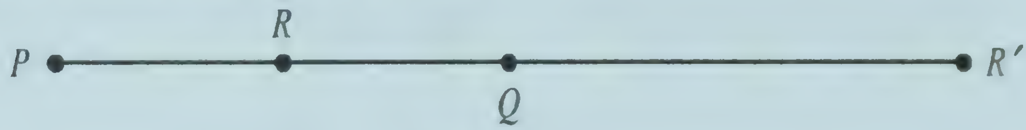
1. $A\,(1, 2)$, $B\,(8, 3)$ ಮತ್ತು $C\,(3, 8)$ ಶೃಂಗಗಳ ತ್ರಿಕೋಣದ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ (ಸೂಚನೆ : ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಧಿ ಎಂದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ - ಮೂರೂ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ).
2. A (1, 3), B (3, –1) ಮತ್ತು C (–5, –5) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
3. A (2, 1), B (3, 4) ಮತ್ತು C (4, 1) ಸಮದ್ವಿಭುಜ ತ್ರಿಕೋಣದ ಶೃಂಗಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
4. $(8, 0)$ ಮತ್ತು $(6, y)$ ಬಿಂದುಗಳು $(-1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. A (–4, 6) ಮತ್ತು B (14, –2) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $A\,(2, 4)$ ಬಿಂದುವಿನ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. A (2, 2), B (–2, –2) ಮತ್ತು $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. (3, –2), (–2, 3), (5, 5) ಮತ್ತು (–4, –4) ಗಳು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ (ಸೂಚನೆ : ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.)

9. (–2, –2), (–1, 2), (8, 6) ಮತ್ತು (7, 2) ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚುತರ್ಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. (7, 9), (3, –7), (–3, 3) ಬಿಂದುಗಳು ಲಂಬಕೋನ ಹಾಗೂ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

10.2.2 ರೇಖಾಖಂಡವೊಂದರ ವಿಭಜನೆ



ಚಿತ್ರ 10.7

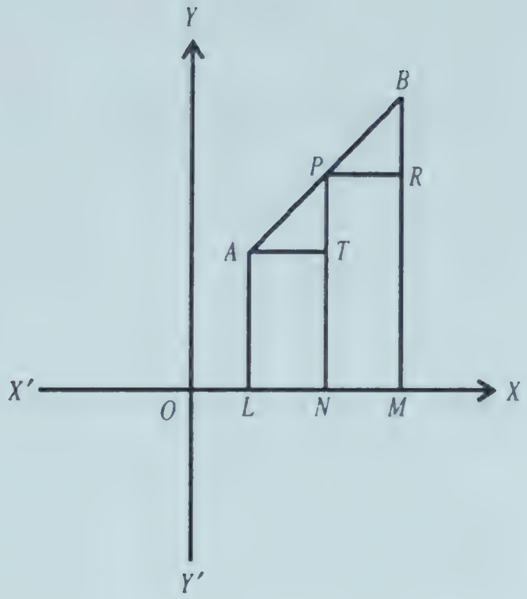
P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ R ಮತ್ತು R' ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. R ಬಿಂದುವು PQ ಸರಳರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿಯೂ, R' ಬಿಂದುವು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿಯೂ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ.

ರೇಖಾಖಂಡ ವಿಭಜನ ಸೂತ್ರಗಳು

(i) ಅಂತರೀಯ ವಿಭಜನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

AB ಯು ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿದ್ದು $A \equiv (x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B \equiv (x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ.

$P(x, y)$ ಬಿಂದುವು AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ. AL, PN ಮತ್ತು BM ಗಳನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ, AT ಮತ್ತು PRಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ PN ಮತ್ತು BM ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 10.8).



ಚಿತ್ರ 10.8

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ APT ಮತ್ತು PBR ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ.

ಆದ ಕಾರಣ $\frac{AP}{PB} = \frac{AT}{PR} = \frac{PT}{BR} = \frac{m}{n}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ... (1)

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ,

$AT = LN = ON - OL = x - x_1$ ... (2)

ಮತ್ತು $PR = NM = OM - ON = x_2 - x$ ... (3)

ಅದೇ ರೀತಿ, $PT = PN - TN = y - y_1$ ... (4)

$BR = BM - RM = y_2 - y$ ... (5)

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $\frac{AT}{PR} = \frac{m}{n}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (2) ಮತ್ತು (3) ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$.

ಅಥವಾ $n(x - x_1) = m(x_2 - x)$

ಅಥವಾ $m x_2 + n x_1 = x(m + n)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ $x = \frac{m x_2 + n x_1}{m + n}$

ಅದೇ ರೀತಿ, (1) ರಿಂದ $\frac{PT}{BR}=\frac{m}{n}$ ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ (4) ಮತ್ತು (5) ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{m}{n}$$

ಅಥವಾ $n(y-y_1)=m(y_2-y)$

ಅಥವಾ $(m+n)y=m\,y_2+n\,y_1$

ಅಂದರೆ, $y=\frac{m\,y_2+n\,y_1}{m+n}$

ಆದ್ದರಿಂದ **ಅಂತರೀಯ ವಿಭಜನ** ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$\boxed{P \equiv \left[\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right]}$$ ಎಂದಾಗುವುವು.

ಸೂಚನೆ : P ಬಿಂದುವು AB ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ, Pಯು AB ಯನ್ನು 1 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

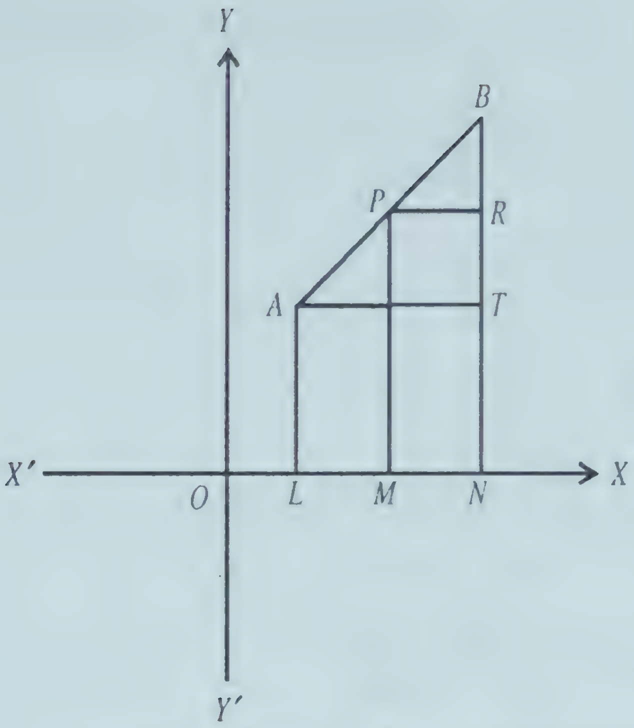
A ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x_1, y_1) ಮತ್ತು B ನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x_2, y_2) ಆದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $\left[\frac{1.x_2+1.x_1}{1+1}, \frac{1.y_2+1.y_1}{1+1}\right]$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅಥವಾ $P\equiv\left[\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right]$.

ಇದನ್ನು **ಮಧ್ಯಬಿಂದುಸೂತ್ರ**ವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

(ii) ಬಾಹ್ಯವಿಭಜನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

P ಬಿಂದುವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 10.9). AL, BM, PN ಗಳನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ, AT ಮತ್ತು BR ಗಳನ್ನು PN ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.9

$A \equiv (x_1, y_1), B \equiv (x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $P \equiv (x, y)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಚಿತ್ರ 10.9ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ APT ಮತ್ತು BPR ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AP}{BP} = \frac{AT}{BR} = \frac{PT}{PR} = \frac{m}{n}$ ... (1)

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ,

$AT = LN = ON - OL = x - x_1$ ... (2)

ಮತ್ತು $BR = MN = ON - OM = x - x_2$ ... (3)

ಅದೇ ರೀತಿ, $PT = PN - TN = y - y_1$ ... (4)

ಮತ್ತು $PR = PN - RN = PN - BM = y - y_2$ ... (5)

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $\frac{AT}{BR} = \frac{m}{n}$

ಇದರಲ್ಲಿ (2) ಮತ್ತು (3) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{m}{n}$ ಅಥವಾ $n(x - x_1) = m(x - x_2)$

ಅಥವಾ $x(m-n) = m x_2 - n x_1$

ಅಂದರೆ, $x = \dfrac{m x_2 - n x_1}{m-n}$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\dfrac{PT}{PR} = \dfrac{m}{n}$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{y-y_1}{y-y_2} = \dfrac{m}{n}$

$n(y-y_1) = m(y-y_2)$

ಅಥವಾ $y(m-n) = m y_2 - n y_1$

ಅಂದರೆ $y = \dfrac{m y_2 - n y_1}{m-n}$

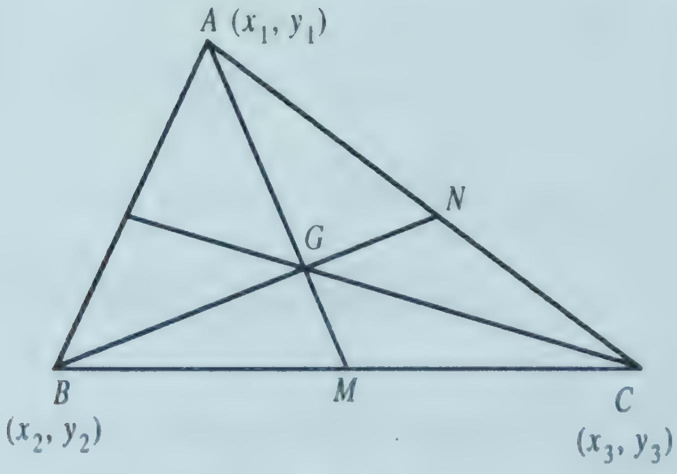
ಆದ್ದರಿಂದ **ಬಾಹ್ಯವಿಭಜನ** ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$\left[\frac{m x_2 - n x_1}{m-n}, \frac{m y_2 - n y_1}{m-n}\right]$$

(iii) ತ್ರಿಕೋಣದ ಕೇಂದ್ರಭ (ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ)ದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ಎಂಬುದು ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರಲಿ.

A ಮತ್ತು B ಶೃಂಗಗಳಿಂದ AM ಮತ್ತು BN ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ (ಇಲ್ಲಿ M ಮತ್ತು N ಗಳು BC ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು). ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು **ಕೇಂದ್ರಭ (ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ)**ವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 10.10).



ಚಿತ್ರ 10.10

ತ್ರಿಕೋಣದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ 2 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

M ಬಿಂದುವು BC ಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾದ್ದರಿಂದ

$$M \equiv \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

G ಬಿಂದುವು AM ಅನ್ನು ಅಂತರೀಯಾಗಿ 2 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ

$$G \equiv \left[\frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 . x_1}{2 + 1}, \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 . y_1}{2 + 1} \right]$$

ಅಥವಾ $$G \equiv \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right]$$

ಸೂಚನೆ : P ಬಿಂದುವು AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ $\frac{m}{n}$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗೆಯೇ P ಬಿಂದುವು AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ $\frac{m}{n}$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. (2, 2) ಮತ್ತು (4, 6) ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 1 : 3 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿಯೂ ಹಾಗೂ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿಯೂ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

P ಬಿಂದುವು (2, 2) ಮತ್ತು (4, 6) ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 1 : 3 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ.

ಅಂತರೀಯ ವಿಭಜನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $= \left[\frac{m x_2 + n x_1}{m + n}, \frac{m y_2 + n y_1}{m + n} \right]$

ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ದತ್ತ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$P \equiv \left[\frac{1.4+3.2}{1+3}, \frac{1.6+3.2}{1+3}\right]$$

$$\equiv \left[\frac{4+6}{4}, \frac{6+6}{4}\right] \equiv \left[\frac{5}{2}, 3\right]$$

Q ಬಿಂದುವು ರೇಖಾಖಂಡದ ಬಾಹ್ಯವಿಭಜನ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$Q \equiv \left[\frac{m x_2 - n x_1}{m-n}, \frac{m y_2 - n y_1}{m-n}\right] \equiv \left[\frac{1.4-3.2}{1-3}, \frac{1.6-3.2}{1-3}\right]$$

ಅಂದರೆ, $Q \equiv [1, 0]$

2. $(1, -2)$ ಮತ್ತು $(-3, 4)$ ಬಿಂದುದ್ವಯವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತ್ರಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.11

P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಿಸುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ 10.11). ಅಂದರೆ, P ಬಿಂದುವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 1 : 2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ, Q ಬಿಂದುವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ 2 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

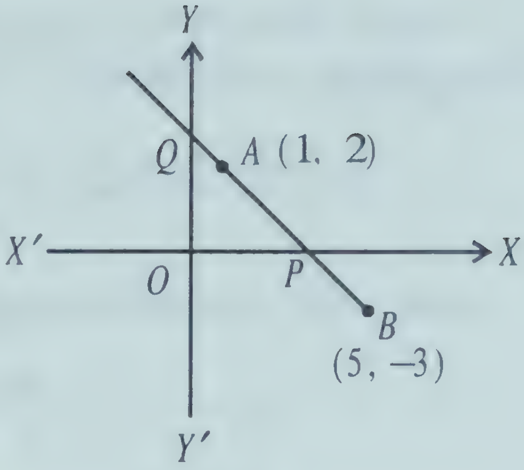
$$\therefore \qquad P \equiv \left[\frac{1(-3)+2(1)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right] \equiv \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$$

Q ಬಿಂದುವು AB ಅನ್ನು 2 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ

$$Q \equiv \left[\frac{2(-3)+1(1)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right] \equiv \left[-\frac{5}{3}, 2\right]$$

3. $A \equiv (1, 2)$ ಮತ್ತು $B \equiv (5, -3)$ ಆದರೆ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳು AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ ? ವಿಭಜನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

x-ಅಕ್ಷವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.12). P ಬಿಂದುವು x - ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಭುಜ (y-ನಿರ್ದೇಶಕ) ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.12

ಅಂದರೆ, $\dfrac{m(-3)+n(2)}{m+n}=0$

$\therefore\ 3m=2n$ ಅಥವಾ $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{3}>0$

ಅಂದರೆ P ಬಿಂದುವು AB ಅನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ 2:3 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

P ಬಿಂದುವಿನ x - ನಿರ್ದೇಶಕ = $\dfrac{2(5)+3(1)}{2+3}=\dfrac{13}{5}$

$P\equiv\left[\dfrac{13}{5},0\right]$ $\therefore$ y-ಅಕ್ಷವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $p : q$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ.

Q ಬಿಂದುವು y-ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ x-ನಿರ್ದೇಶಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\dfrac{p(5)+q(1)}{p+q}=0$

ಅಥವಾ $5p+q=0$

$\therefore\ 5p=-q$ ಅಥವಾ $\dfrac{p}{q}=-\dfrac{1}{5}<0$ ಅಂದರೆ Q ಬಿಂದುವು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ 1 : 5 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

Q ಬಿಂದುವಿನ y-ನಿರ್ದೇಶಕ = $\dfrac{1(-3)-5(2)}{1-5}=\dfrac{13}{4}$

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಂದ y-ಅಕ್ಷವು AB ರೇಖಾಂಖಂಡವನ್ನು 1 : 5 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಛೇದನ ಬಿಂದು $Q\equiv\left(0,\dfrac{13}{4}\right)$

4. ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ B, C ಮತ್ತು G (ಕೇಂದ್ರಭ)ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(2, 3)$, $(-3, 4)$ ಮತ್ತು $(-5, -1)$ ಆಗಿವೆ. A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A ಶೃಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y) ಆಗಿರಲಿ. ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು,

$$G \equiv \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right]$$

ಆದರೆ, $G \equiv (-5,1)$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$$\therefore \quad (-5, -1) \equiv \left[\frac{2-3+x}{3}, \frac{3+4+y}{3}\right]$$

ಅನುರೂಪ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಸಮನಾದವುಗಳಾದ್ದರಿಂದ

$$\frac{-1+x}{3} = -5 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x = -14$$

ಮತ್ತು $\frac{7+y}{3} = -1$ ಅಥವಾ $y = -10$

ಆದ್ದರಿಂದ $A \equiv (-14, -10)$.

5. $(-1, -2), (6, 1)$ ಮತ್ತು $(3, 5)$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಶೃಂಗಗಳು, $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C \equiv (x_3, y_3)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ AB, BC ಮತ್ತು CA ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂಧುಗಳು ದತ್ತ ನಿಯಮದಂತೆ,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -1 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x_1 + x_2 = -2$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 6 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x_2 + x_3 = 12$$

$$\frac{x_3 + x_1}{2} = 3 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad x_3 + x_1 = 6$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 16 \text{ ಆಗುತ್ತದೆ.}$$

ಅಥವಾ $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ ನಮಗೆ $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ ಮತ್ತು $x_3 = 10$ ಎನ್ನುವುದು ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{y_1 + y_2}{2} = -2$ ಅಥವಾ $y_1 + y_2 = -4$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = 1 \text{ ಅಥವಾ } y_2 + y_3 = 2$$

$$\frac{y_3 + y_1}{2} = 5 \text{ ಅಥವಾ } y_3 + y_1 = 10$$

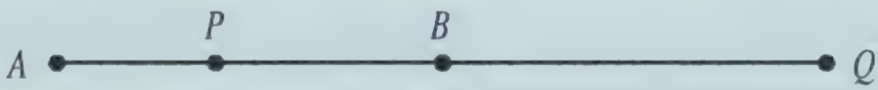
ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = 8 \text{ ಅಥವಾ } y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $y_1 = 2$, $y_2 = -6$ ಮತ್ತು $y_3 = 8$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು $(-4, 2)$, $(2, -6)$ ಮತ್ತು $(10, 8)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಹರಾತ್ಮಕ ವಿಭಜನೆ



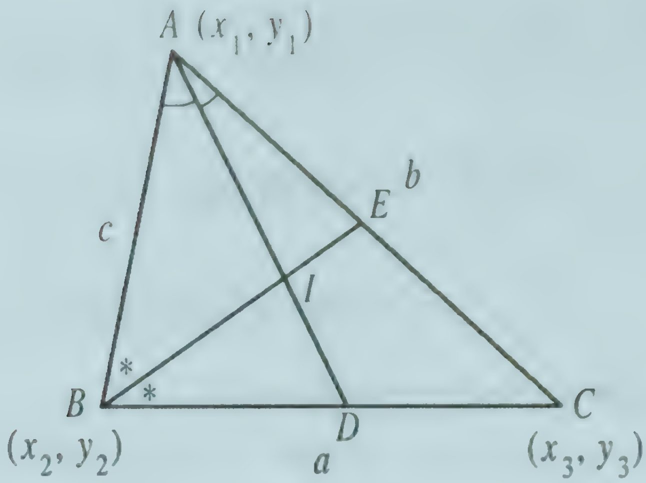
ಚಿತ್ರ 10.13

A ಮತ್ತು *B* ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಅಂತರೀಯವಾಗಿಯೂ ಹಾಗೂ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿಯೂ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು "ಹರಾತ್ಮಕ ವಿಭಜನೆ" ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. *P* ಮತ್ತು *Q* ಬಿಂದುಗಳು *AB* ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಹರಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹರಾತ್ಮಕ ರೂಪಭೇದಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು (ಚಿತ್ರ 10.13).

ತ್ರಿಕೋಣದ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ

ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C \equiv (x_3, y_3)$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.14). *AD* ಮತ್ತು *BE*, $\angle BAC$ ಮತ್ತು $\angle ABC$ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು *I* ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. *I* ಬಿಂದುವನ್ನು *ABC* ತ್ರಿಕೋಣದ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.



ಚಿತ್ರ 10.14

BC, CA ಮತ್ತು *AB* ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಕ್ರಮವಾಗಿ *a, b* ಮತ್ತು *c* ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ $BC = a$, $CA = b$ ಹಾಗೂ $AB = c$. *AB* ಯು $\angle BAC$ ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

ಅಂದರೆ *BC* ಯನ್ನು *D* ಬಿಂದುವು $c : b$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ *D* ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$D \equiv \left[\frac{c\,x_3 + b\,x_2}{c+b}, \frac{c\,y_3 + b\,y_2}{c+b}\right]$$

ಇದೇ ರೀತಿ *BI* ಸರಳರೇಖೆಯು $\angle ABD$ ಯ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{c}{BD}$$

ಆದರೆ, $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ ಅಥವಾ $\frac{DC}{BD} = \frac{b}{c}$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{BD + DC}{BD} = \frac{b+c}{c}$ (ಕಾಪೊನೆಂಡೊ ನಿಯಮದಿಂದ)

ಅಥವಾ $BD = \frac{ac}{b+c}$ $(\because \; BD + DC = BC = a)$

ಅಂದರೆ, $$\frac{AI}{ID}=\frac{c(b+c)}{ac}=\frac{b+c}{a}$$

ಇದರಿಂದ, I ಬಿಂದುವು AD ಯನ್ನು $b+c:a$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ I ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$I\equiv\left[\frac{(b+c)\left(\frac{c\,x_3+b\,x_2}{c+b}\right)+a\,x_1}{(b+c)+a},\ \frac{(b+c)\left(\frac{c\,y_3+b\,y_2}{c+b}\right)+a\,y_1}{(b+c)+a}\right]$$

ಅಥವಾ $$I\equiv\left[\frac{a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3}{a+b+c},\ \frac{a\,y_1+b\,y_2+c\,y_3}{a+b+c}\right]$$

ಸೂಚನೆ : ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ I ನಿಂದ ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳಿಗೂ ಲಂಬದೂರ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. I ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಲಂಬದೂರವನ್ನೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳೂ ಆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋಣದ ಒಳಗಿರುವ ಆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶ ವೃತ್ತ ಎಂದೂ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಅಂತಸ್ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.
   - (i) (3, 4) ಮತ್ತು (5, 2), 3 : 2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ
   - (ii) (–1, –2) ಮತ್ತು (–2, –1), 3 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ
   - (iii) (4, –1) ಮತ್ತು (–2, 6), 3 : 4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ
   - (iv) (8, –6) ಮತ್ತು (6, –8), 1 : 2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ
2. (2, 1) ಮತ್ತು (1, 2) ಬಿಂದುದ್ವಯಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ತ್ರಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.
3. (2, 4) ಮತ್ತು (4, –2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ವಿಭಜನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.
4. (2, 1), (3, 4) ಮತ್ತು (–2, –2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳಾಗುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

5. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7, 7, 6 ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

6. ABC ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (3, 3), $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ಮತ್ತು $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

7. (–2, –2), (–1, 2), (8, 6) ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ ನಾಲ್ಕನೇ ಶೃಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

8. (2, 5), (–2, 3), (–2, –1) ಶೃಂಗಗಳನ್ನುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜದ ಕೇಂದ್ರಭವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

9. $\left(8, \frac{12}{5}\right)$ ಬಿಂದುವು (x, y) ಮತ್ತು (10, 2) ಬಿಂದುದ್ವಯವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ 3 : 2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

10. (6, 4) ಮತ್ತು (–2, 8) ಬಿಂದುದ್ವಯುವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು x- ಮತ್ತು y- ಅಕ್ಷಗಳು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ ? ವಿಭಜನ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾವುವು ?

11. C (2, 6) ವೃತ್ತವೊಂದರ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದು ಮತ್ತು (3, 7) ವ್ಯಾಸದ ಒಂದು ತುದಿಯಾದರೆ, ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

12. (–2, 3) ಮತ್ತು (3, 7) ಬಿಂದುದ್ವಯವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು (–17, –19) ಬಿಂದುವು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

13. (2, 3), (–1, 2) ಮತ್ತು (4, 1) ಶೃಂಗಗಳ ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

14. (–2, 3) ಮತ್ತು (4, 5) ಬಿಂದುದ್ವಯವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಹರಾತ್ಮಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ $\left(0, \frac{11}{5}\right)$ ಬಿಂದುವಿನ ರೂಪಭೇದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. (4, a) ಬಿಂದುವು A (1, 3) ಮತ್ತು B (5, –5) ಬಿಂದುದ್ವಯವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು a ನ ಬೆಲೆ ಏನು ?

16. A (3, 4) ಮತ್ತು B (6, –8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ 2 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುದ್ವಯದ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. (1, –2) ಮತ್ತು (–3, 4) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ತ್ರಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ತ್ರಿಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. (6, 8) ಮತ್ತು (*a*, *b*) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು (3, 4) ಆದರೆ *a* ಮತ್ತು *b* ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

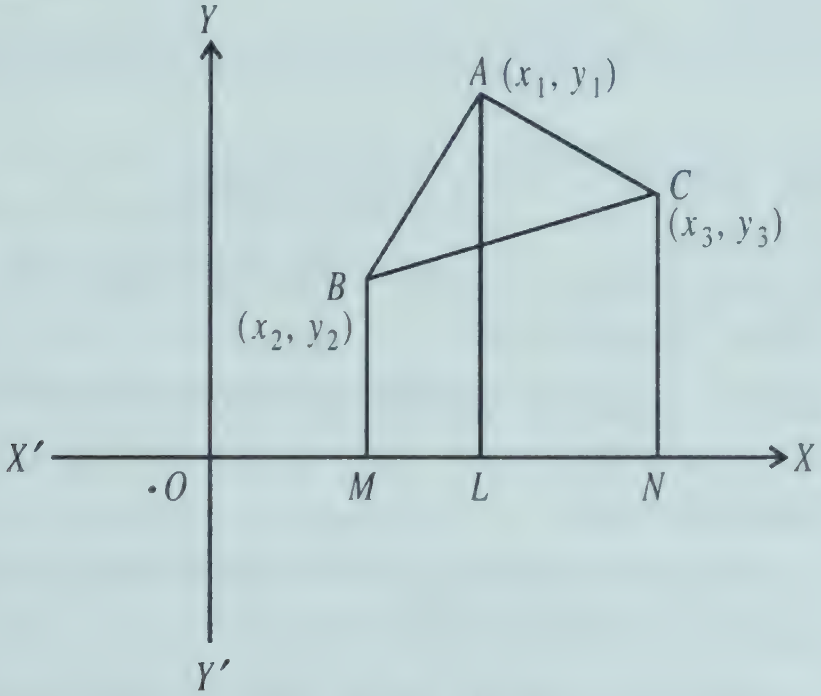
19. (3, 4) ಬಿಂದುವು ತ್ರಿಕೋಣವೊಂದರ ಕೇಂದ್ರಭವಾದಲ್ಲಿ (6, 2) ಮತ್ತು (–5, –4) ಬಿಂದುಗಳು ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ ಮೂರನೇ ಶೃಂಗದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

20. (1, –2), (–2, 4) ಮತ್ತು (3, –6) ಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಕೋಣವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳಾದಲ್ಲಿ ಅದರ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. ತ್ರಿಕೋನವೊಂದರ ಶೃಂಗಗಳು (0, 0), (–3, 4), (8, 6) ಆದರೆ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.2.3 ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ಮತ್ತು C (x_3, y_3) ಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಕೋಣದ ದತ್ತ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 10.15

AL, BM ಮತ್ತು *CN* ಗಳನ್ನು *x*-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 10.15)

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ,

ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ≡ *ABML* ತ್ರಪೀಜಿಯಂನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + *ALNC* ತ್ರಪೀಜಿಯಂನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – *BMNC* ತ್ರಪೀಜಿಯಂನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಆದ್ದರಿಂದ, *ABC* ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =

$$\frac{1}{2}ML(AL+BM)+\frac{1}{2}LN(AL+CN)-\frac{1}{2}MN(BM+CN)$$

ಚಿತ್ರ 10.15ಅನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, $ML = OL - OM = x_1 - x_2$

$LN = ON - OL = x_3 - x_1$

$MN = ON - OM = x_3 - x_2$

$AL = y_1, BM = y_2$ ಹಾಗೂ $CN = y_3$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)(y_3 + y_2) + (x_3 - x_1)(y_1 + y_3)\right.$$

$$\left. - \ (x_3 - x_2)(y_2 + y_3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_3)\right]$$

ಅಥವಾ $\mathbf{\Delta ABC = \frac{1}{2}\Sigma\, x_1(y_2 - y_3)}$ ಚದರಮಾನ.

ಸೂಚನೆ : (1) A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ABC ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಶೃಂಗಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

(3) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದು ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ :-

ಚತುರ್ಭುಜದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಒಂದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆದಾಗ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಚುತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ಸೂತ್ರದ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $(a, b+c), (b, c+a), (c, a+b)$ ಬಿಂದುಗಳಿ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

$P \equiv (a, b+c), Q \equiv (b, c+a)$ ಮತ್ತು $R \equiv (c, a+b)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $$\Delta PQR = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[ac - ab + ba - bc + cb - ca\right]$$

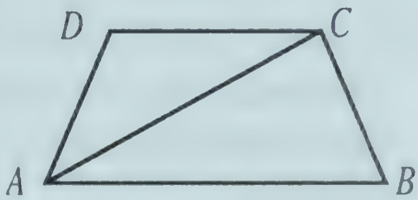
ಅಂದರೆ, $\Delta PQR = \frac{1}{2}(0) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ P, Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವೆಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

2. $(2, 5), (-2, 3), (-2, -1)$ ಮತ್ತು $(3, -2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶೃಂಗಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$A \equiv (2, 5), B \equiv (-2, 3), C \equiv (-2, -1)$ ಮತ್ತು $D \equiv (3, -2)$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.16.)

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದಾದ AC ಕರ್ಣವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.16

ಆಗ $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ =

ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ACD ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \left|\frac{1}{2}\left[2(3+1) - 2(-1-5) - 2(5-3)\right]\right|$$

$$\left|+\frac{1}{2}\left[2(-2+1) + 3(-2-5) - 2(5+2)\right]\right|$$

$$= 8 + 17 = 25$$

$ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 25 ಚದರಮಾನ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.3

1. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಶೃಂಗಗಳನ್ನುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(2,3), (-1,2), (4,1)$
   (ii) $(-5,-2), (9,3), (3,5)$
   (iii) $(2,3), (-2,-5), (-4,6)$.
2. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಶೃಂಗಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
   (i) $(0,0), (2,3), (-2,1), (0,-1)$.
   (ii) $(1,3), (1,-2), (6,2), (4,4)$.
   (iii) $(1,-4), (2,0), (1,2), (-1,3)$
3. $A(a,-4), B(1,-1)$ ಮತ್ತು $C(5,2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ a ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. $(1,4), (3,-2)$ ಮತ್ತು $(-3,16)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.
5. $(2,3), (-1,-2)$ ಮತ್ತು $(5,8)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

10.3 ಬಿಂದುಪಥ ಹಾಗೂ ಅದರ ಸಮೀಕರಣ

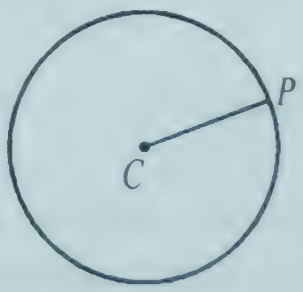
ಒಂದು ದತ್ತ ನಿಯಮಾನುಸಾರ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವು ರೇಖಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯ "ಬಿಂದುಪಥ" ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ "ಪಥ" ಎಂಧು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪಥದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ದತ್ತ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ವೃತ್ತವನ್ನೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವೊಂದರ ಪಥ ಎನ್ನಬಹುದು.

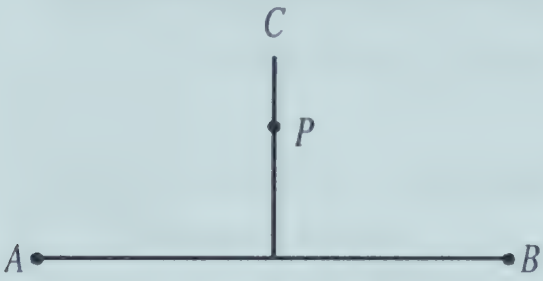
C ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ (ಸ್ಥಿರ) ಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ, P ಬಿಂದುವನ್ನು ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

ಆಗ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ರಚಿಸಲ್ಪಡುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಒಂದು ವೃತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಸ್ಥಿರಬಿಂದು C ಅನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವೆಂತಲೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದೂರ CP ಅನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವೆಂತಲೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 10.17).



ಚಿತ್ರ 10.17

2. ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು, ಅದರ ಎರಡು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 10.18

AB ಯು ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವಾಗಿರಲಿ.

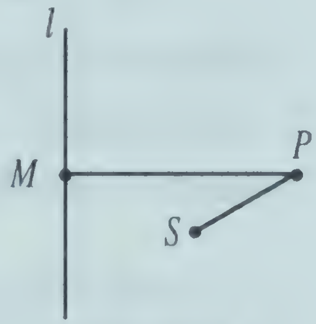
CD ಯು ಅದರ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.18).

CD ಯು ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವು A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದ ಕಾರಣ CD ಯು ಮೇಲಿರುವ P ಬಿಂದುವು ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಪಥ ಚಲನವೇ AB ರೇಖಾಖಂಡದ ಲಂಬ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. S ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು l ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ, ಹಾಗೂ P ಒಂದು ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

PM ಅನ್ನು l ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

$\frac{SP}{PM} = e$ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ **ಆಗಿರುವಂತೆ** P ಯು ಚಲಿಸಿದರೆ ಅದು ರೇಖಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆ ಒಂದು **ಶಂಕುಜ**ವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 10.19).



ಚಿತ್ರ 10.19

ಬಿಂದುಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ನಿಯಮಗಳು

1. $P(x, y)$ ಅನ್ನು ಒಂದು ಚರ ಬಿಂದುವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

2. ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳಿಗೆ x ಮತ್ತು yಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು.

3. ನಂತರ ಆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಬೇಕು.

ಹಾಗೆ ಪಡೆಯಲಾದ ಸಮೀಕರಣವು ಉದ್ದೇಶಿತ ಬಿಂದುಪಥವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

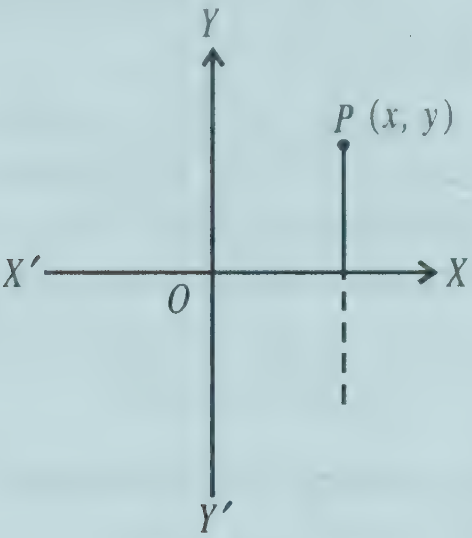
1. (i) x-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಮತ್ತು (ii) y-ಅಕ್ಷದಿಂದ 4 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬೇರೆ

ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳ ಪಥಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

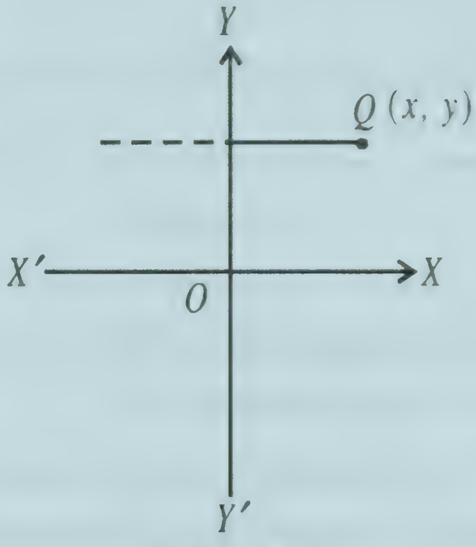
$P(x, y)$ ಒಂದು ಚರ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.20).

ದತ್ತನಿಯಮದಂತೆ, x-ಅಕ್ಷದಿಂದ P ಬಿಂದುವು 4 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

ಅಂದರೆ $x = \pm 4$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.20



ಚಿತ್ರ 10.21

ಅದೇರೀತಿ $Q(x, y)$ ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವಾಗಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.21).

ದತ್ತನಿಯಮದಂತೆ, y ಅಕ್ಷದಿಂದ Q ಬಿಂದುವು 4 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ.

ಅಂದರೆ $x = \pm 4$ ಆಗುತ್ತದೆ.

2. $(-a, 0)$ ಮತ್ತು $(a, 0)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$A \equiv (-a, 0)$ ಮತ್ತು $B \equiv (a, 0)$ ದತ್ತಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ

ಹಾಗೂ $P(x, y)$ ಚರಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

ದತ್ತ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $PA = PB$ ಅಥವಾ $PA^2 = PB^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ದೂರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಿಸಿರುವುದರಿಂದ

$$(x+a)^2 + (y-0)^2 = (x-a)^2 + (y-0)^2$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ $x = 0$ ಪಥಸಮೀಕರಣವೆಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ಮನಗಾಣುತ್ತೇವೆ.

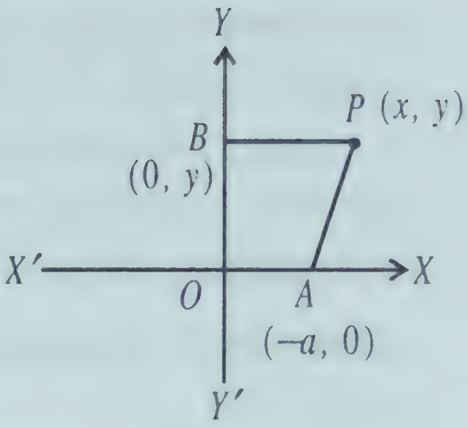
3. $(a, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹಾಗೂ y-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಪಥದ

ಸಮೀಕರಣವು $y^2 = a(2x - a)$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

$P(x, y)$ ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$A \equiv (a, 0)$ ಮತ್ತು $B \equiv (0, y)$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.22).

ದತ್ತ ನಿಯಮದಂತೆ, $PA = PB$ ಅಥವಾ $PA^2 = PB^2$



ಚಿತ್ರ 10.22

ಅಂದರೆ, $(x-a)^2 + (y-0)^2 = (x-0)^2 + (y-y)^2$

ಅಥವಾ $x^2 + a^2 - 2ax + y^2 = x^2 + 0$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ $y^2 = a(2x - a)$ ಎನ್ನುವುದು ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ. (ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ಪ್ಯಾರಾಬೋಲಾ ಎಂಬ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ).

ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

1. x- ಮತ್ತು y- ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. $(3, 4)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?
3. $(3, -1)$ ಮತ್ತು $(-2, 4)$ ಬಿಂದು ದ್ವಯಿದಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ತ್ರಿಕೋಣವೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 6 ಚದರಮಾನ ಮತ್ತು ಎರಡುಶೃಂಗಗಳು $(3, 4)$ ಮತ್ತು $(-1, 2)$ ಆದರೆ ಮೂರನೇ ಶೃಂಗದ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. $A(0, 0)$ ಮತ್ತು $B(-2, 3)$ ಬಿಂದುಗಳು ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 16 ಚದರಮಾನ ಆದಲ್ಲಿ, C ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. $(3, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮತ್ತು ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರವು ಮೂಲಬಿಂದು ಮತ್ತು ಚರಬಿಂದುವಿನ ನಡುವಿನ ಅಂತರದ ಎರಡರಷ್ಟಾದರೆ ಚರಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

7. ಮೂಲಬಿಂದು ಮತ್ತು $(a, 0)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ದೂರವು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಚರ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

8. $(2, 3)$ ಮತ್ತು $(3, 4)$ ಬಿಂದು ದ್ವಯವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಚರಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ನಿರ್ಮಿಸಿದಲ್ಲಿ, ಅಂತಹ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವೇನು ?

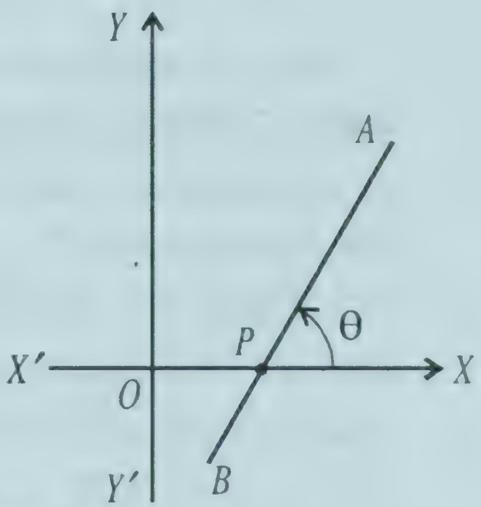
9. ಚರಬಿಂದುವೊಂದು x-ಅಕ್ಷದಿಂದ ಮತ್ತು $(1, 1)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದರೆ ಅದರ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 - 2x - 2y + 2 = 0$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

10. $A \equiv (c, 0)$ ಮತ್ತು $B \equiv (-c, 0)$ ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಚರ ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರಗಳ ಸಂಕಲನವು $2a$ ಆದಲ್ಲಿ, ಚರಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ. (ಈ ಪಥಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ದೀರ್ಘವೃತ್ತ (ಎಲಿಪ್ಸ್) ಎಂಬ ಶಂಕುಜವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.)

10.4 ಸರಳರೇಖೆ

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಕನಿಷ್ಠ ಉದ್ದದ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಾವು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಕೆಲವು ಉಪಯುಕ್ತ ಪದಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅವಶ್ಯ.



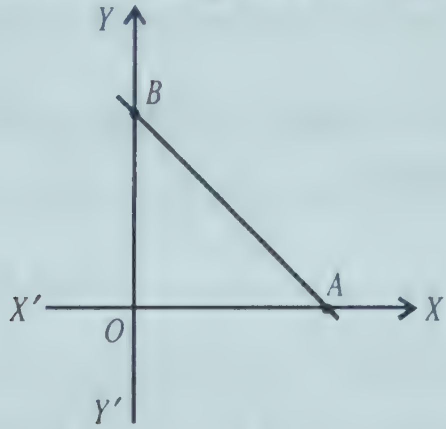
ಚಿತ್ರ 10.23

1. **ಬಾಗು :** AB ಸರಳರೇಖೆಯು x- ಅಕ್ಷವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.23). ಧನ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ $\angle XPA$ ಕೋನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು AB ಯ ಬಾಗು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\angle XPA = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

2. ಓಟ : AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಬಾಗು θ ಆಗಿದ್ದರೆ $\tan\theta$ ವನ್ನು ಓಟವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಏರಿಳಿತಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

3. ಛೇದಕಗಳು : ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.24). OA ಯನ್ನು AB ಯ x- ಛೇದಕವೆಂದೂ, OB ಯನ್ನು ABಯ y- ಛೇದಕವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಛೇದಕಗಳು (ರೇಖಾಂತರಗಳು)

ಆಯಾ ಅಕ್ಷಗಳ ಧನ, ಋಣ ದಿಶೆಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಆಗಿರುವುವು.

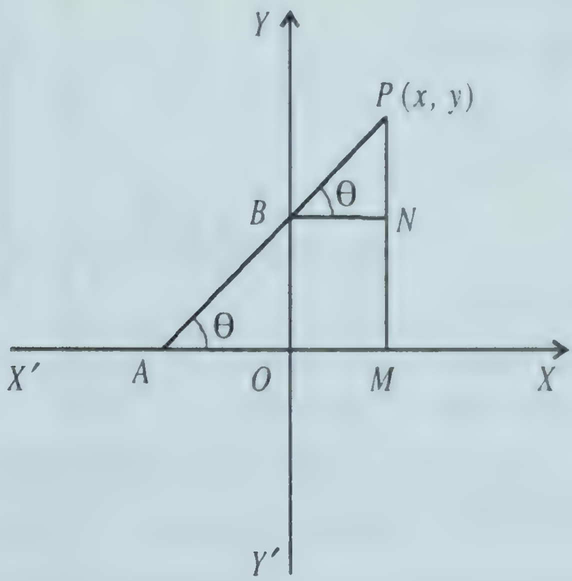


ಚಿತ್ರ 10.24

10.4.1 ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳು

I ಓಟ - ಛೇದಕ ರೂಪ

ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದು x-ಅಕ್ಷವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ, y-ಅಕ್ಷವನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಛೇದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.25). ಸರಳರೇಖೆಯ y-ಛೇದಕವು c ಆಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ $OB = c$ ಆಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ, ಮತ್ತು AB ಯ ಓಟವು $\tan\theta$ ಆಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PM ಅನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ, BN ಅನ್ನು PM ಗೂ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಚಿತ್ರ 10.25 ಚಿತ್ರ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $\angle PBN = \theta$. ಆದ್ದರಿಂದ PBN ತ್ರಿಕೋಣದಿಂದ



ಚಿತ್ರ 10.25

$$\tan\theta = \frac{PN}{BN} = \frac{PM - NM}{OM} = \frac{PM - OB}{OM}$$

ಅಥವಾ $\tan\theta = \frac{y-c}{x}$

ಇಲ್ಲಿ AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವಾದ $\tan\theta$ ಅನ್ನು m ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಆಗ AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y = mx + c$$

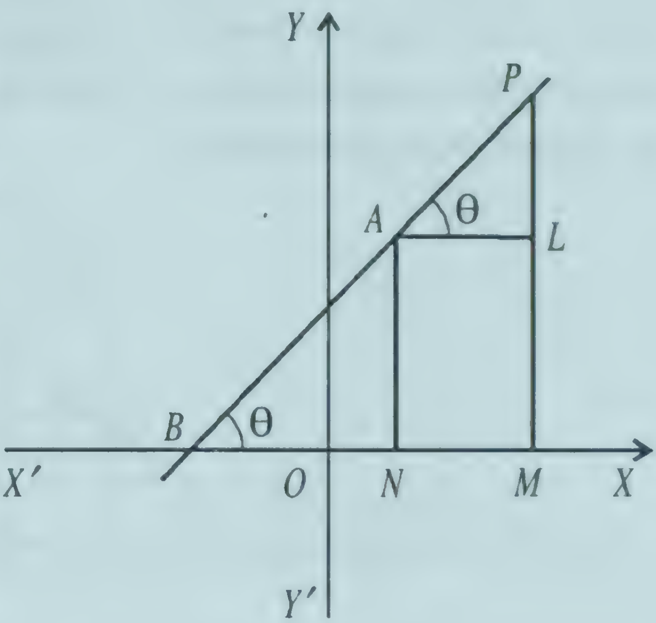
ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : ಸರಳರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದಲ್ಲಿ y- ಛೇದಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ (ಅಂದರೆ $c = 0$). ಆಗ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $y = mx$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

II ಬಿಂದು-ಓಟರೂಪ

ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದರ ಬಾಗು θ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಅದರ ಓಟವು $\tan\theta$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $A(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ $P(x, y)$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.26).

A ಮತ್ತು P ಬಿಂದುಗಳಿಂದ AN ಮತ್ತು PM ಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ x- ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ, AL ಅನ್ನು PM ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.26

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ $\angle PAL = \theta$ ಮತ್ತು PAL ತ್ರಿಕೋಣದಿಂದ $\tan\theta = \frac{PL}{AL}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ $PL = PM - LM = y - y_1$ ಮತ್ತು

$AL = PM = OM - ON = x - x_1$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆಗ $\tan\theta = \frac{PL}{AL} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

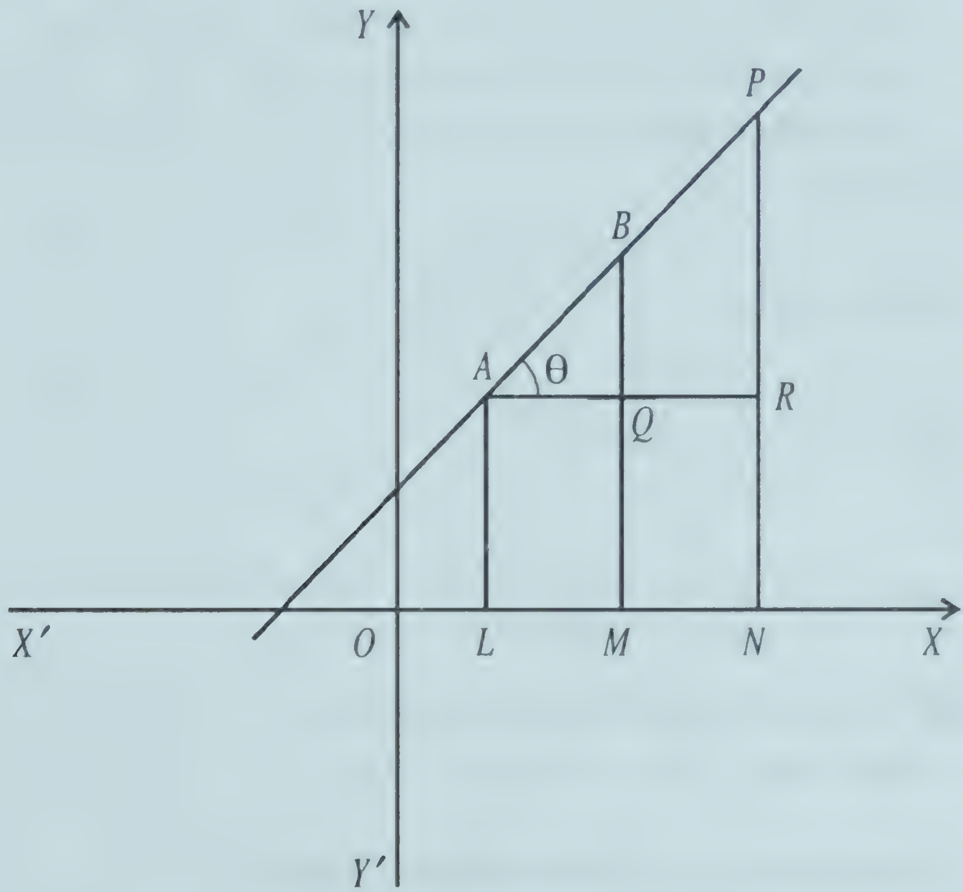
ಓಟ $\tan\theta = m$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

ಅಥವಾ $\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಂದು-ಓಟ ರೂಪವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

III ಎರಡು-ಬಿಂದುಗಳ ರೂಪ

$A\,(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B\,(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $P\,(x, y)$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.27).



ಚಿತ್ರ 10.27

A, B ಮತ್ತು P ಬಿಂದುಗಳಿಂದ AL, BM ಮತ್ತು PN ಗಳನ್ನು x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. AR ಅನ್ನು PN ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ABQ ಮತ್ತು APR ತ್ರಿಕೋಣಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಗುಣವಿಶೇಷಗಳು ಹೀಗಿವೆ:

(i) $\angle A$ ಯು ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋಣಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿದೆ.

(ii) ರಚನಾಧರಿತವಾಗಿ $\angle AQB = \angle ARP = 90^\circ$.

(iii) ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋಣಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ಎಲ್ಲ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ΔAPR ಮತ್ತು ΔABQ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವುವು.

ಅಂದರೆ $\Delta APR \,|||\, \Delta ABQ$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{PR}{BQ} = \frac{AR}{AQ}$ ... (1)

ಚಿತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

$$PR = PN - RN = PN - AL = y - y_1$$
$$BQ = BM - QM = BM - AL = y_2 - y_1$$
$$AR = LN = ON - OL = x - x_1$$
$$AQ = LM = OM - OL = x_2 - x_1$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

ಅಥವಾ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ಅಥವಾ $\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$

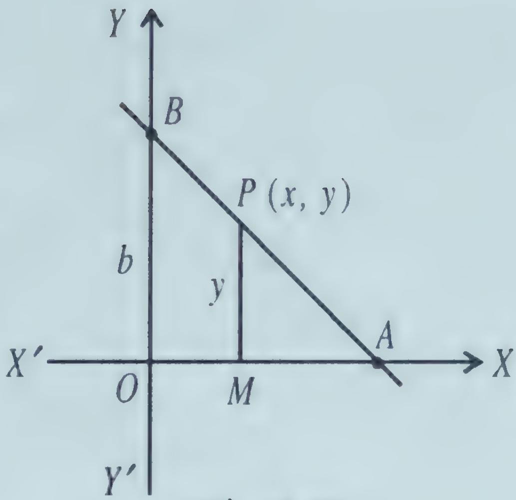
ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಂದು-ಓಟ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಓಟವು $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಅಂದರೆ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ... (2)

IV ಛೇದಕಗಳ ರೂಪ

ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OA = a$ ಮತ್ತು y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OB = b$ ರೇಖಾಂತರ (ಅಥವಾ ಛೇದಕ)ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಿ. $P\,(x, y)$ ಬಿಂದುವು ಸರಳರೇಖೆಯ

ಮೇಲಿನ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PMಅನ್ನು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 10.28).



ಚಿತ್ರ 10.28

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ OAB ಮತ್ತು MAP ಎರಡು ತ್ರಿಕೋಣಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{OB}{MP} = \frac{OA}{MA}$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ... (1)

ದತ್ತದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ $MP = y$ ಎನ್ನುವುದು ತಿಳಿಯುವುದು. ಹಾಗೆಯೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ $MA = OA - OM = a - x$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $\frac{b}{y} = \frac{a}{a-x}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $\frac{a-x}{a} = \frac{y}{b}$

ಅಥವಾ $1 - \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ ಅಥವಾ $\mathbf{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

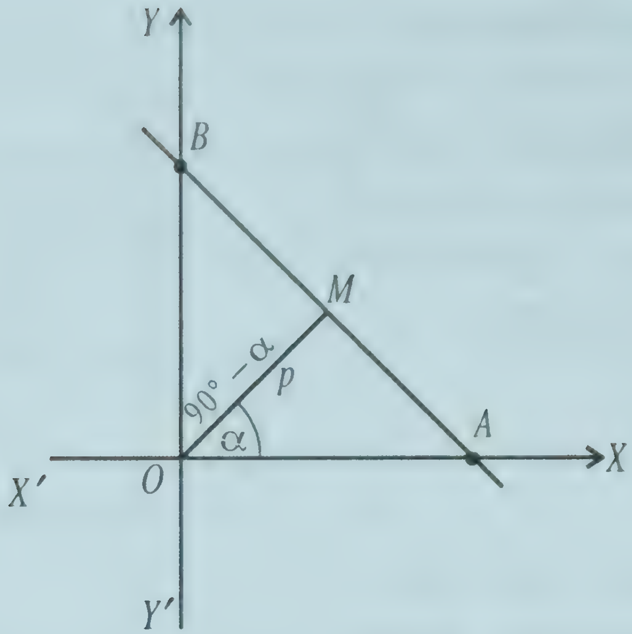
ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದು AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಛೇದಕಗಳ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣ.

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b x- ಮತ್ತು y- ಅಕ್ಷಗಳ ಛೇದಕಗಳಾಗಿವೆ.

V ಲಂಬ ರೂಪ

ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿA ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ OM ಅನ್ನು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 10.29). $OM = p$ ಮತ್ತು $\angle AOM = \alpha$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 10.29

OAM ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\cos\alpha = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{p}{x\text{-ಛೇದಕ}}$

ಅಥವಾ x- ಛೇದಕ $= \dfrac{p}{\cos\alpha}$.

ಅದೇ ರೀತಿ, OMB ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\cos(90° - \alpha) = \dfrac{OM}{OB}$

ಅಥವಾ $\cos(90° - \alpha) = \dfrac{OM}{y\text{-ಛೇದಕ}}$

ಅಂದರೆ y-ಛೇದಕ $= \dfrac{p}{\sin\alpha}$ $(\because \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha)$

ಛೇದಕ ರೂಪವನ್ನಾಧರಿಸಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{x}{\left(\dfrac{p}{\cos\alpha}\right)} + \frac{y}{\left(\dfrac{p}{\sin\alpha}\right)} = 1 \text{ ಅಥವಾ } \mathbf{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$$

ಸೂಚನೆ : ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಹಲವು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳೆಲ್ಲದರ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು x, y ಗಳಲ್ಲಿನ

ಒಂದು ಮೊದಲನೇ ದರ್ಜೆಯ (ಫಸ್ಟ್ ಡಿಗ್ರಿ) ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು $ax+by+c=0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

10.4.2 ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನ

1. ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ $ax+by+c=0$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $by=-ax-c$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಥವಾ $y=\left(-\frac{a}{b}\right)x+\left(-\frac{c}{a}\right)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಈಗ ಓಟ-ಛೇದಕ ಅಂದರೆ $y=mx+c$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $m=-\frac{a}{b}=-\frac{x\text{ನ ಸಹಾಂಕ}}{y\text{ನ ಸಹಾಂಕ}}$

ಹಾಗೆಯೇ, y-ಛೇದಕ$=-\frac{c}{b}=-\frac{\text{ನಿಷ್ಫಲ ಪದ}}{y\text{ನ ಸಹಾಂಕ}}$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸುತ್ತೇವೆ.

2. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು $ax+by+c=0$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅದನ್ನು $ax+by=-c$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $(-c)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

ಅಥವಾ $$\frac{x}{\left(-\frac{c}{a}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{c}{b}\right)}=1$$

ಅಂದರೆ, $\frac{x}{x\text{-ಛೇದಕ}}+\frac{y}{y\text{-ಛೇದಕ}}=1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಛೇದಕಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

x-ಛೇದಕ $=-\frac{c}{a}$ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕ $=-\frac{c}{b}$.

3. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು $ax+by+c=0$ ಆಗಿರಲಿ.

$a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$ ಎಂದು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದಾಗ

$$a^2+b^2 = r^2[\cos^2\alpha+\sin^2\alpha] = r^2$$

ಅಥವಾ $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$\cos\alpha = \frac{a}{r}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ಮತ್ತು

$\sin\alpha = \frac{b}{r}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$x(r\cos\alpha)+y(r\sin\alpha) = -c$$

ಅಥವಾ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = -\frac{c}{r} = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ಅಥವಾ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

ಇದು ಈಗ ಸರಳರೇಖೆಯ ಲಂಬರೂಪವಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದು O ನಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ

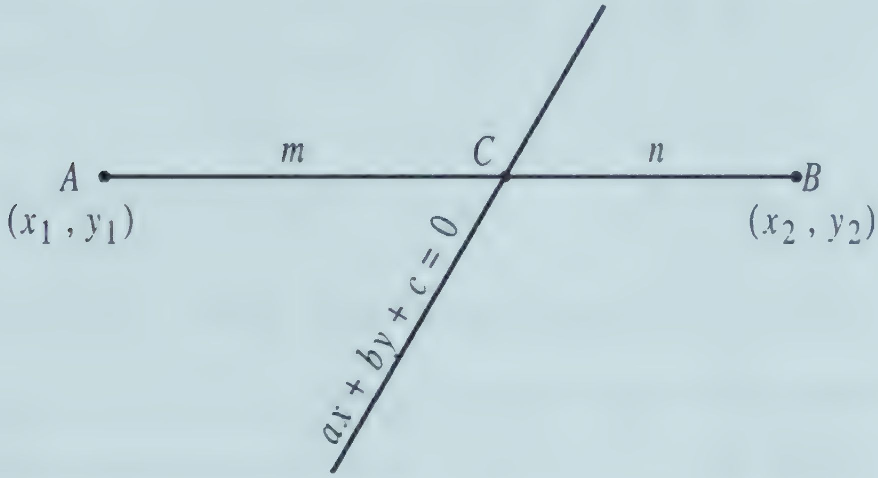
$$\text{ಲಂಬದೂರ} = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \text{ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.}$$

ಇಲ್ಲಿ c ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕವಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಲಂಬದೂರವನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೇ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉಪ ಪ್ರಮೇಯ : $ax+by+c=0$ ಸರಳರೇಖೆಯು $A\ (x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B\ (x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $-\left(\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}\right)$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $ax+by+c=0$ ಸರಳರೇಖೆಯು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $m:n$ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ C ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು,

$$C \equiv \left[\frac{m x_2 + n x_1}{m+n}, \frac{m y_2 + n x_2}{m+n}\right]$$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. (ಚಿತ್ರ 10.30)



ಚಿತ್ರ 10.30

C ಬಿಂದುವು $ax+by+c=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೂ ಇರುವುದರಿಂದ

$$a\left(\frac{m x_2 + n x_1}{m+n}\right) + b\left(\frac{m y_2 + n y_1}{m+n}\right) + c = 0$$

$$a(m x_2 + n x_1) + b(m y_2 + n y_1) + c(m+n) = 0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ m ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಮತ್ತು n ಅನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿದಾಗ

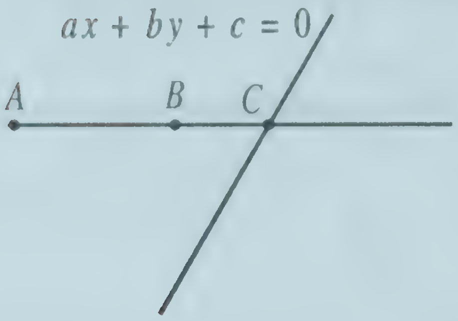
$$m(a x_2 + b y_2 + c) + n(a x_1 + b y_1 + c) = 0$$

ಅಥವಾ $$\frac{m}{n} = -\frac{(a x_1 + b y_1 + c)}{(a x_2 + b y_2 + c)}$$

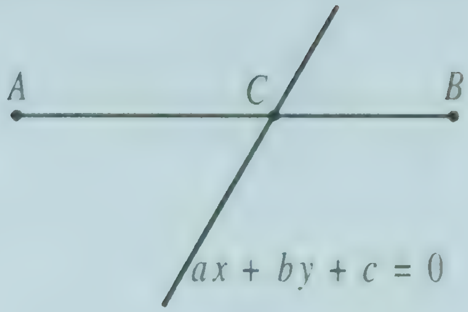
ಸೂಚನೆ : (i) $\frac{m}{n}$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಋಣವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಒಂದೇ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಚಿತ್ರ 10.31 ಅನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $ax+by+c=0$ ಸರಳರೇಖೆಯು AB

ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.31



ಚಿತ್ರ 10.32

(ii) ಅದೇರೀತಿ $\frac{m}{n}$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಧನವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಆಚೆ ಈಚೆಯ ವಿರುದ್ಧಬದಿಗಳಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರ 10.32 ಅನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $ax+by+c=0$ ಸರಳರೇಖೆಯು AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. (5, 6) ಮತ್ತು (8, 3) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

   (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖಾಭಾಗದ ಓಟವು $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ಎನ್ನುವುದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖಾಭಾಗದ ಓಟವು $=\frac{3-6}{8-5}=-\frac{3}{3}=-1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

2. (2, 3) ಮತ್ತು (3, 4) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಬಾಗುವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

   ಸರಳರೇಖೆಯ ಬಾಗು θ ಎಂದಿರಲಿ.

   ಆಗ ಓಟ $= \tan\theta$ ಆಗುತ್ತದೆ. ... (1)

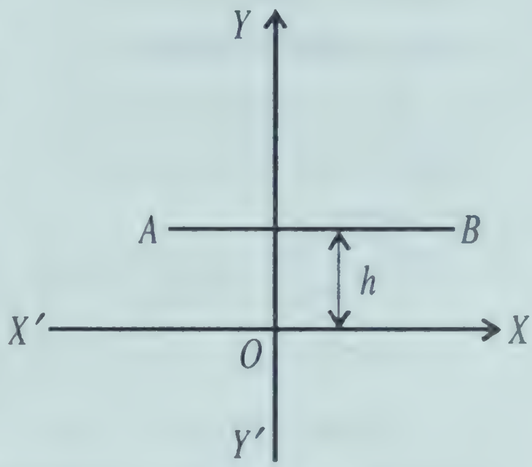
   (2, 3) ಮತ್ತು (3, 4) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ರೇಖೆಯ ಓಟ

$$= \frac{4-3}{3-2} = 1$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ $\tan\theta = 1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಬಾಗು, $\theta = 45^\circ$ ಆಗುತ್ತದೆ.

3. x-ಅಕ್ಷದಿಂದ 7 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = h$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. (h ಎಂಬುದು x-ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಅಂತರ) ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = 7$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 10.33). (ಅಂದರೆ, AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ y-ನಿರ್ದೇಶಕ 7 ಆಗಿರುತ್ತದೆ).

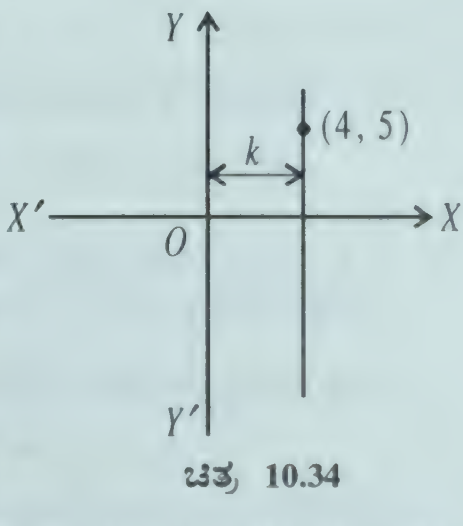


ಚಿತ್ರ 10.33

4. y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು (4, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಯು

x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 10.34). ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x = k$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ k ಎಂಬುದು y-ಅಕ್ಷದ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ಅಂತರ.

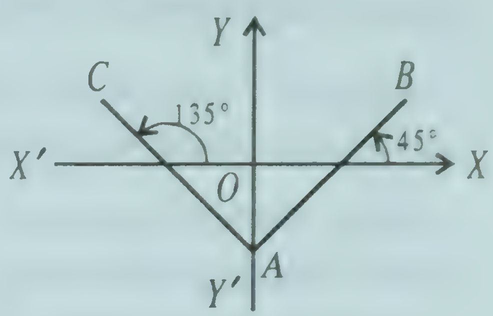


ಚಿತ್ರ 10.34

ಈಗ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯು y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು (4, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ $k = 4$. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವು $x = 4$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಅಂದರೆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ x ನಿರ್ದೇಶಕವು 4 ಆಗಿರುತ್ತದೆ).

5. ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಭಾಗುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು $-\frac{2}{3}$ ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

y-ಛೇದಕವು $-2/3$ ಆಗಿದ್ದು, ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಭಾಗುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಬಾಗು 45° ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಬಾಗು 135°.



ಚಿತ್ರ 10.35

(i) ಚಿತ್ರ 10.35ರಲ್ಲಿ 45° ಬಾಗು ಇರುವ AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$y = mx + c$ ಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ $y = (\tan 45°) + (-2/3)$

ಅಂದರೆ $3y = 3x - 2$ $\quad (\because \tan 45° = 1)$

ಅಥವಾ $3(x + y) - 2 = 0.$

(ii) ಅದೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ 135° ಬಾಗು ಇರುವ AC ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y = (\tan 135°)\, x + (-2/3)$$

$$(\because \tan 135° = -1)$$

ಅಂದರೆ $3y = 3(-x) - 2$

ಅಥವಾ $3(x + y) + 2 = 0.$

AB ಮತ್ತು AC ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೂ y-ಛೇದಕ $OA = -2/3$.

6. $(-5, 6)$ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು 150° ಬಾಗುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

ಓಟ-ಬಿಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = (\tan 150°)(x + 5)$$

ಅಥವಾ $y - 6 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x + 5)$ $\quad (\because \tan 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}})$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು
$x+\sqrt{3}y+(5-6\sqrt{3})=0$.

7. $(a, 0)$ ಮತ್ತು $(0, b)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

$(x_1, y_1)\equiv(a, 0)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2)\equiv(0, b)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

ಅಂದರೆ $-ay=bx-ab$ ಅಥವಾ $bx+ay=ab$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ab ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

8. $y=mx+c$ ಸರಳ ರೇಖೆಯು (2, 5) ಮತ್ತು (–3, 7) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದರೆ, m ಮತ್ತು c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಳರೇಖೆಯು (2, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ, $x=2$ ಮತ್ತು $y=5$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$5=2m+c \qquad \text{... (1)}$$

ಮತ್ತು (–3, 7) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ ($x=-3$, $y=7$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ)

$$7=-3m+c \qquad \text{... (2)}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದಾಗ

ಓಟ $m=-\dfrac{2}{5}$ ಮತ್ತು y-ಛೇದಕ $c=\dfrac{29}{5}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

9. $A(4,5)$, $B(-2, 1)$ ಮತ್ತು $C(6,-3)$ ಬಿಂದುಗಳು ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ A ಶೃಂಗದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$M \equiv \left[\frac{-2+6}{2}, \frac{1-3}{2}\right] = [2, -1].$$

$M(2,-1)$ ಮತ್ತು $A(4,5)$ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times (x - x_1)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ರೂಪವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ

$$y + 1 = \frac{5+1}{4-2} \times (x - 2)$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ A ಮೂಲಕ ಮಧ್ಯರೇಖೆ AMನ ಸಮೀಕರಣವು $3x - y - 7 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

10. (3,4) ಮತ್ತು (-1,3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು 3:4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ 135 ಬಾಗವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

p ಬಿಂದುವು (3, 4) ಮತ್ತು (–1, 3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 3 : 4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲಿ. ಆಗ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$P \equiv \left[\frac{m x_2 + n x_1}{m+n}, \frac{m y_2 + n y_1}{m+n}\right]$$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿ,

$$P \equiv \left[\frac{3(-1)+4(3)}{3+4}, \frac{3(3)+4(4)}{3+4}\right] \equiv \left[\frac{9}{7}, \frac{25}{7}\right]$$

ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $= \tan 135° = -1$.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ಸೂತ್ರವನ್ನಾಧರಿಸಿ

$$y - \frac{25}{7} = (-1)(x - \frac{9}{7})$$

ಅಥವಾ $7(x + y) - 34 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

11. x-ಛೇದಕವು -3 ಮತ್ತು y-ಛೇದಕವು 4 ಮಾನಗಳಿಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ಎಂದು ಛೇದಕಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $a=-3$ ಮತ್ತು $b=4$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1 \text{ ಅಥವಾ } 4x-3y+12=0$$

ಎಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ.

12. (7, –3) ಮತ್ತು (–8, –1) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಛೇದಕಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y+3=\frac{-1+3}{-8-7}\times(x-7)$$

ಅಥವಾ $2x+15y+31=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಛೇದಕಗಳ

ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ, $\frac{x}{\left(-\frac{31}{2}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{31}{15}\right)}=1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$a=\frac{-31}{2}, b=\frac{-31}{15}$ ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಛೇದಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ,

$$\frac{a}{b}=-\frac{31}{2}\times\frac{15}{-31}=\frac{15}{2}$$

ಅಂದರೆ x ಮತ್ತು ಛೇದಕಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು 15 : 2 ಆಗುತ್ತದೆ.

13. (3, –4) ಮತ್ತು (5, 2) ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖಾಖಂಡದ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು x ಮತ್ತು y ಛೇದಕಗಳು 2 : 1 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

(3, –4) ಮತ್ತು (5, 2) ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು M ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $M \equiv \left[\frac{3+5}{2}, \frac{-4+2}{2}\right] \equiv (4, -1)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ರೇಖೆಯ x ಮತ್ತು y ಛೇದಕಗಳು a ಮತ್ತು b ಆಗಿರಲಿ.

ದತ್ತ ನಿಯಮದಂತೆ $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$, ಅಥವಾ $a = 2b$

ಛೇದಕಗಳ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$\frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = 1$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $x + 2y = 2b$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈ ರೇಖೆಯು (4, –1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$4 + 2(-1) = 2b$ ಅಥವಾ $b = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ $a = 2(b) = 2(1) = 2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದಕಾರಣ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x + 2y = 2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

14. $5x + 7y = 9$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ ಮತ್ತು ಛೇದಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.
ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಓಟವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $y = mx + c$ ಗೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ $7y = -5x + 9$ ಅಥವಾ

$$y = \left(-\frac{5}{7}\right)x + \frac{9}{7}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣದ x ನ ಸಹಾಂಕವನ್ನು ಓಟವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಓಟ $= -\frac{5}{7}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ x ಮತ್ತು y ಛೇದಕಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಎಂದು ರೂಪಾಂತರಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ $5x+7y=9$ ಅಥವಾ $\frac{5x}{9}+\frac{7y}{9}=1$

ಅಥವಾ $\frac{x}{\left(\frac{9}{5}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{9}{7}\right)}=1$

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ x–ಛೇದಕ, $a=\frac{9}{5}$ ಮತ್ತು y–ಛೇದಕ $b=\frac{9}{7}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

15. $5x-12y+13=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ಗೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ಗೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಲು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಹಂತಹಂತವಾಗಿ ಅಪಕರ್ಷಿಸಬೇಕು.

$$5x-12y=-13 \qquad \ldots (1)$$

ಈಗ $r=\sqrt{(5)^2+(12)^2}=\sqrt{25+144}=13$

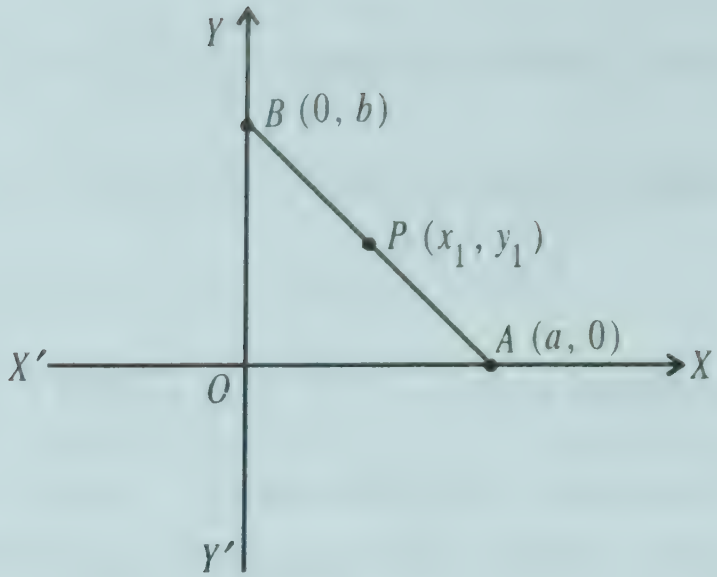
ಸಮೀಕರಣ (1) ಅನ್ನು –13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y=\frac{13}{13}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $-\frac{5}{13}=\cos\alpha$ ಎಂದು $\frac{12}{13}=\sin\alpha$ ಮತ್ತು $p=1$.

16. ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದರ ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖಾಭಾಗವು $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಜಿತವಾದರೆ ಆ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{x}{2x_1}+\frac{y}{2y_1}=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.



ಚಿತ್ರ 10.36

A ಬಿಂದುವು x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(a, 0)$ ಎಂದು, B ಬಿಂದುವು y-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $(0, b)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸ ಬಹುದು. $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು ದ್ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ

$$(x_1, y_1) \equiv \left[\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right]$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅನುರೂಪ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಸಮಾನಗೊಳಿಸಿದಾಗ $\frac{a}{2} = x_1$ ಅಥವಾ $a = 2x_1$

ಮತ್ತು $\frac{b}{2} = y_1$ ಅಥವಾ $b = 2y_1$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಛೇದಕಗಳ ರೂಪವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.5

1. $150°$ ಬಾಗುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು y ಛೇದಕವು $\frac{3}{2}$ ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

2. 120° ಬಾಗು ಮತ್ತು y ಛೇದಕವು 7 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

3. ಓಟ 2/7 ಇರುವ ಮತ್ತು (–3, 8) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

4. ಓಟ –4 ಮಾನಗಳಷ್ಟಿರುವ ಮತ್ತು $\left(\frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

5. x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 2/3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

6. x ಅಕ್ಷದಿಂದ –5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

7. y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ 3/4 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

8. y ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ –8 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

9. (–4, –3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಬಾಗು 45°. ಇದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

10. ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

(i) (3, 6), (5, 9), (ii) (0, 0), (1, 4), (iii) $\left(at_1^2, 2at_1\right)\left(at_2^2, 2at_1\right)$

(iv) $\left(at_1, \frac{a}{t_1}\right), \left(at_2, \frac{a}{t_2}\right)$, (v) $\left(0, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{4}{5}, 0\right)$

11. x ಮತ್ತು y ಛೇದಕಗಳು 5 ಮತ್ತು –6 ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತು ಮಾಡಿ.

12. (–2, 3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಸಮಾನ ರೇಖಾಂತರಗಳುಳ್ಳ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

13. (5, 2) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು y ಛೇದಕವು x ಛೇದಕದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

14. (4, 10) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ 10 ಚದರಮಾನಗಳಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋಣವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

15. (4, –5) ಮತ್ತು (6, 3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು x, y ಛೇದಕಗಳು 3 : 4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

16. (–2, 3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖಾಭಾಗವು 3 : 4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿತವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

17. (4, 0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು x, y ಛೇದಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 6 ಆದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

18. ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು (3, 0) ಮತ್ತು (0, –4) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

19. ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದರ, ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ರೇಖಾಭಾಗವು (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಜಿತವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{x}{2x_1}+\frac{y}{2y_1}=1$ ಆದರೆ (i) ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ,

(ii) ಲಂಬರೂಪಾಂತರವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, (iii) ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

20. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ 5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಲಂಬದ ಬಾಗು 30° ಆಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

21. ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಬಾಗುವಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

(i) $p=-\frac{8}{3}$, $\alpha=135°$ (ii) $p=3$, $\alpha=45°$ (iii) $p=-5$, $\alpha=60°$

22. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ನಿಯಮಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ $3x-ay+1=0$ ಸರಳರೇಖೆಯು

(i) (–3, 4) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋದಾಗ,

(ii) (0, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ,

(iii) ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ 2 ಆದಾಗ a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

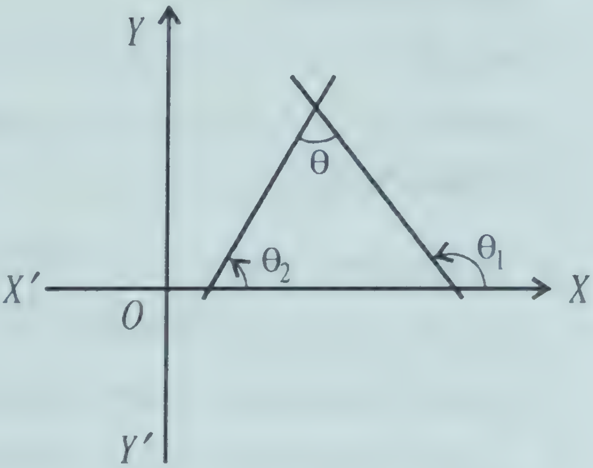
23. (2, 9) ಮತ್ತು (4, –5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು $y = 3x - 2$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ?

24. (–4, 1) ಮತ್ತು (2, 7) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು $2x + 3y - 5 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ?

25. (–1, 2) ಮತ್ತು (–4, –3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು (2, 2) ಮತ್ತು (–5, 7) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಯಾವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ?

10.5 ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ

AC ಮತ್ತು *BC* ಎಂಬ ಎರಡು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು *C* ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ ಮತ್ತು ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟವು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\tan\theta_1$ ಮತ್ತು $\tan\theta_2$ ಆಗಿರಲಿ. ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ $\angle ACB = \theta$ ಆಗಿರಲಿ. ಚಿತ್ರ 10.37ರಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ *ABC* ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 10.37

$$\theta_1 = \theta_2 + \theta$$

(θ_1 ಬಾಹ್ಯಕೋನವಾದ್ದರಿಂದ)

ಅಥವಾ

$\theta = \theta_1 - \theta_2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲೂ tangent ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು $\tan\theta_1 = m_1$ ಮತ್ತು $\tan\theta_2 = m_2$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

ಇಲ್ಲಿ m_1 ಮತ್ತು m_2 ಓಟಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ $\tan\theta$ ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ

ಋಣಾತ್ಮಕ ಆಗಿರಬಹುದು. θ ಲಘುಕೋನವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

ಎಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಅಥವಾ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘು ಕೋನದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

ಸೂಚನೆ :

(1) ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರರೇಖೆಗಳಾದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = 0$

ಅಥವಾ $m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$ ಅಂದರೆ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬರೇಖೆಗಳಾದರೆ $\theta = 90° \Rightarrow \tan\theta \to \infty$,

ಅಂದರೆ, $1 + m_1 m_2 = 0$ ಅಥವಾ $m_1 m_2 = -1$.

ಅಂದರೆ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(i) ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು m ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಲಂಬವು $-\frac{1}{m}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) x-ಅಕ್ಷದ ಹಾಗೂ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $m = 0$ ($\because\ \theta = 0°\ \tan\theta = 0$);

y-ಅಕ್ಷದ ಹಾಗೂ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $m \to \infty$, ಅನಂತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ($\because\ \theta = 90°,\ \tan\theta \to \infty$).

(3) ಮೇಲಿನ ಸೂಚನೆಗಳ ಆಧಾರದಮೇರೆಗೆ, $ax + by + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax + by + c_1 = 0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. (ಇಲ್ಲಿ c ಮತ್ತು c_1 ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ). ಇದೇ ರೀತಿ $ax + by + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $bx - ay + c_2 = 0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y=\sqrt{3}\,x+4$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}\,y=x+7$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ $y=mx+c$ ರೂಪದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು $m_1=\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $m_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯ ಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$\tan\theta=\left|\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta=30^\circ.$$

2. $ax+by+c=0$ ಮತ್ತು $(a+b)x-(a-b)y=0$, ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು

$m_1=-\dfrac{a}{b}$ ಮತ್ತು $m_2=\dfrac{a+b}{a-b}$

ಆಗ $$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-\frac{a}{b}-\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}{1+\left(-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}\right|$$

$$=\left|\frac{-a(a-b)-b(a+b)}{b(a-b)-a(a+b)}\right|=\left|\frac{-(a^2+b^2)}{-(a^2+b^2)}\right|=1$$

$\therefore\ \theta=45^\circ.$

3. $2x+5y-6=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ (i) ಸಮಾಂತರವಾಗಿಯೂ (ii) ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ಮತ್ತು (4, –7) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x+5y-6=0$ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $2x+5y+c_1=0$ ಎಂದು ತಿಳಿಯ ಬಹುದು.

ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು (4, –7) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$2(4)-5(-7)+c_2=0$ ಅಥವಾ $c_2=-34$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $5x-2y-34=0$.

4. $y-3px+4=0$ ಮತ್ತು $(2p-1)x-(8p-1)y-6=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ pನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು, $m_1=3p$ ಮತ್ತು $m_2=\frac{2p-1}{8p-1}$.

ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $m_1m_2=-1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $(3p)\left(\frac{2p-1}{8p-1}\right)=-1$

ಅಥವಾ $6p^2-3p=-8p+1 \Rightarrow 6p^2+5p-1=0$

ಅಥವಾ $(6p-1)(p+1)=0 \Rightarrow p=\frac{1}{6}$ ಅಥವಾ $p=-1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

5. (2, –3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $5x+6y-2=0$ ಸರಳರೇಖೆಯು 45° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು m ಆಗಿರಲಿ. ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $m_2=-\frac{5}{6}$

ದತ್ತ ನಿಯಮಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ, $\tan 45°=\left|\frac{m_1+\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}m_1}\right|$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\frac{6m_1+5}{6-5m_1}=\pm 1$

ಆಗ m_1ನ ಬೆಲೆಗಳು $\frac{1}{11}$ ಮತ್ತು -11 ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

m_1ನ ಈ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಿಗನುಗುಣವಾಗಿ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $11y=x+11c_1$ ಮತ್ತು $y=-11x+c_2$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು (2, –3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ,

$c_1=-\frac{35}{11}$ ಮತ್ತು $c_2=19$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x-11y-35=0$ ಮತ್ತು $11x+y-19=0$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. (ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{1}{11}$ ಮತ್ತು -11 ಆಗಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ -1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ).

ಅಭ್ಯಾಸ 10.6

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

   (i) $3x-4y+1=0$ ಮತ್ತು $6x-8y+7=0$

   (iii) $3x+y=0$ ಮತ್ತು $15x+5y-8=0$

2. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

   (i) $\frac{x}{7}+\frac{y}{3}=0$ ಮತ್ತು $\frac{x}{9}-\frac{y}{21}=1$.

   (ii) $2x-3y+1=0$ ಮತ್ತು $6x+4y-5=0$.

3. $12y=8x-5$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $4x-7y=2$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು (2, 3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. (2, 1) (–1, –3), (4, 5) ಮತ್ತು (7, 9) ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ ಕರ್ಣಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. (–2, 5) ಮತ್ತು (3, 8) ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಂತರ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

7. $2x+5y-6=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು 4 ಮಾನಗಳಷ್ಟು y-ಛೇದಕವುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. A (–5, 1), B (5, 5) ಮತ್ತು C (10, 7) ತ್ರಿಕೋಣದ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ A ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. A (3,–2), B (–2, 3) ಮತ್ತು C (–4, –4) ಶೃಂಗಗಳ ತ್ರಿಕೋಣದ ಉನ್ನತಿಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. (2, 3) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $3x - 5y + 31 = 0$, ಈ ಸರಳರೇಖೆಗೆ (i) ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ (ii) ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.6.1 ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

ಮತ್ತು $$a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 = 0 \qquad \ldots (2)$$

ಆಗಿರಲಿ.

ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಆಗಿದ್ದರೆ ಈ ಬಿಂದುವು ಎರಡೂ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0 \qquad \ldots (3)$$

ಮತ್ತು $$a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 = 0 \qquad \ldots (4)$$

(3) ಮತ್ತು (4) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$\frac{x_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y_1}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

ಅಥವಾ $x_1 = \left(\dfrac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\right)$ ಮತ್ತು $y_1 = \left(\dfrac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\right)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ (1) ಮತ್ತು (2) ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು

$$(x_1, y_1) \equiv \left[\frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\right]$$

ಸೂಚನೆ : $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ ಆದಾಗ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿದ್ದರೆ $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$.

10.6.2 ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಲು ನಿಯಮ

ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ಮತ್ತು $a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$ ಆಗಿರಲಿ.

ಮೊದಲೆರೆಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು

$$\left[\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-b_1a_2}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-b_1a_2}\right]$$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದಾದರೆ ಅಂತಹ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಾವು "ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥ" ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರನೇ ಸರಳರೇಖಯೂ ಸಹ ಮೊದಲೆರೆಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೊಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $$a_3\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-b_1a_2}\right)+b_3\left(\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-b_1a_2}\right)+c_3=0$$

ಅಥವಾ $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-b_1a_2)=0$

ಇದನ್ನು $\sum a_3(b_1c_2-b_2c_1)=0$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಇದು ಮೂರು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಲು ಇರುವ ನಿಯಮ. ಇದೇ ನಿಯಮವನ್ನು **ನಿರ್ಧಾರಕ ರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

10.6.3 ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ.

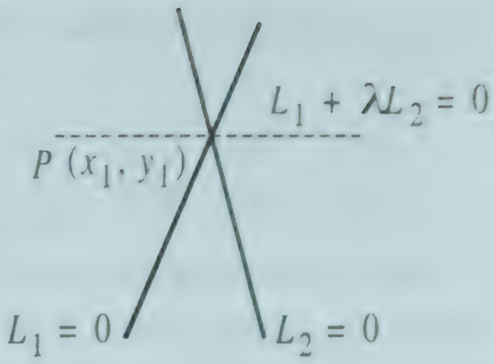
ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $a_1x+b_1y+c_1=0$ ಮತ್ತು $a_2x+b_2y+c_2=0$ ಆಗಿರಲಿ. **ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು**

$$(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0 \qquad \ldots (1)$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಮೊದಲನೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಅದು ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಿತ್ರ 10.38 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಅದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರೊಂದಿಗೆ ತಾಳೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.



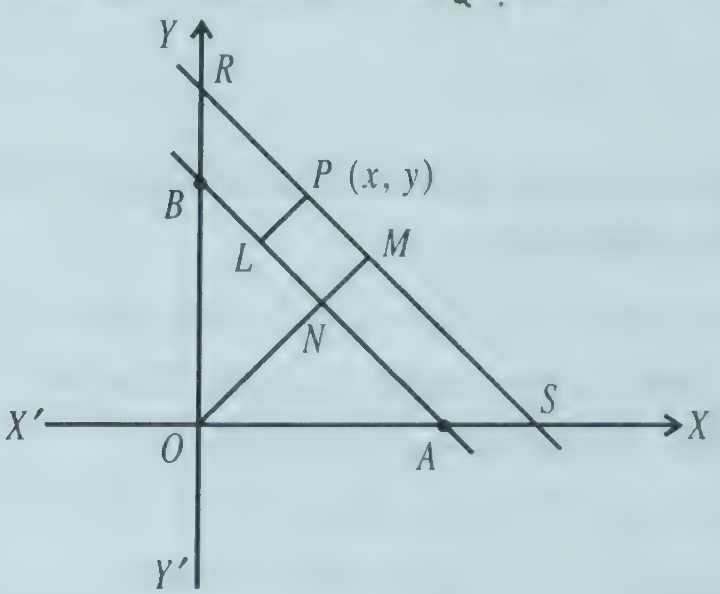
ಚಿತ್ರ 10.38

λದ ವಿವಿಧಮ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅನೇಕ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಸೂಚನೆ : $L_1 = 0$ ಮತ್ತು $L_2 = 0$ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದರೆ $L_1 + \lambda L_2 = 0$ ಎಂಬುದು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

10.6.4 ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ದೂರ

$ax + by + c = 0$ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು $P(x_1, y_1)$ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. (ಚಿತ್ರ 10.39) ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ದೂರ d ಎಂದು ಇರಲಿ. ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ RS ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 10.39

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ, $MN = PL = d$ ಆಗುತ್ತದೆ. RS ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$ax + by - (ax_1 + by_1) = 0$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಲಂಬರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $OM = \dfrac{ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು ಮೂಲ ಬಿಂದುವ ನಡುವಿನ ದೂರ $ON = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ಆದ್ದರಿಂದ $d = PL = MN = OM - ON$

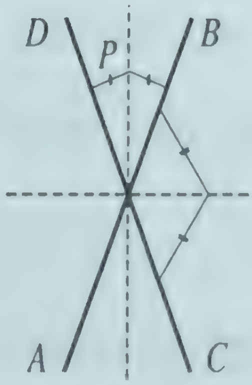
ಅಥವಾ $$d = \frac{ax_1+by_1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \left(\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ಅಂಶವಾದ (ax_1+by_1+c) ಎಂಬುದು ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು. ಲಂಬದೂರವನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವೆಂದೇ ಪರಿಗಣಿಸಿ ಅದರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು :-

$$\mathbf{d = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|}$$

10.7 ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಆಗಿರಲಿ ಹಾಗು ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು AB ಮತ್ತು CD ಗಳಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10.40). $P(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಆಗ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿರುವ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 10.40

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \qquad \ldots(1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : (i) ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಧನಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ಮತ್ತು ಋಣಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊಂದಿರದ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) ಯಾವುದೇ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಕೋನಗಳ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಕಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(iii) ಒಂದು ದ್ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದರ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 45° ಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, ಆ ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು ನಾವು "ಲಘುಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉಳಿದ ಇನ್ನೊಂದು ದ್ವಿಭಾಜಕವನ್ನು " ಅಧಿಕ ಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(iv) ದತ್ತ ಸರಳರೇಖಾಯುಗ್ಮವು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಎರಡು ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ, ಎರಡು ಲಂಬಕೋಣಗಳನ್ನು ದ್ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x - 3y = 0$ ಮತ್ತು $8x - 12y + 5 = 0$

ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವೊಂದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, $x = 0$ ಆದಾಗ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $2x - 3y + 4 = 0$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = 0$ ಆದಾಗ $3y = 2(0) + 4$ ಅಥವಾ $y = \frac{4}{3}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $2x - 3y + 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು, ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನದೂರದ ಸೂತ್ರ

$$\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$ ವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ

$$= \left|\frac{8(0)-12\left(\frac{4}{3}\right)+5}{\sqrt{64+144}}\right| = \left|\frac{-11}{\sqrt{208}}\right| = \frac{11}{\sqrt{208}}$$ ಮಾನಗಳು.

2. $A(3,5)$ ಮತ್ತು $B(-8,-6)$ ಬಿಂದುಗಳು $x-y-8=0$ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ದೂರವನ್ನು ಕೊಡುವ ಸೂತ್ರ :-

$$\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ A (3, 5) ಬಿಂದು ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$= \left|\frac{3-5-8}{\sqrt{1+1}}\right| = \left|\frac{-10}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{10}{\sqrt{2}}\right| \quad ....(1)$$

ಹಾಗೆಯೇ, B (–8, –6) ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$= \left|\frac{-10}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{10}{\sqrt{2}}\right| \quad ....(2)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ, A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿವೆಯೆಂಬುದು ನಿರೂಪಿತವಾಗುವುದು.

3. $x+y-1=0$ ಮತ್ತು $2x+3y-8=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ. ಅವೆರೆಡರ ಓಟ = - 1.

$P(x_1, y_1)$ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $x+y-1=0$, ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$= \left|\frac{x_1+y_1-1}{\sqrt{2}}\right|$$

ಹಾಗೆಯೇ $2x+3y-8=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮತ್ತು $P(x', y')$ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$= \left|\frac{2x_1+3y_1-8}{\sqrt{2}}\right|$$

ದತ್ತವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, $\left|\frac{x_1+y_1-1}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{2x_1+3y_1-8}{\sqrt{2}}\right|$

ಅಥವಾ $\frac{(x_1+y_1-1)}{\sqrt{2}} = \frac{2x_1+3y_1-8}{\sqrt{2}}$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ $x_1+2y_1-7=0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(x_1, y_1) ಅನ್ನು (x, y)ಗೆ ಬದಲಿಸಿದಾಗ ಬಿಂದುವಿನ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಪಥಸಮೀಕರಣವು $x+2y-7=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

4. $x+2y+1=0$ ಮತ್ತು $2x-y+2=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು (8,0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು, $(x+2y+1)+\lambda(2x-y+2)=0$ ....(1)

ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು (8, 0) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ

$[8+2(0)+1]+\lambda[2(8)-0+2]=0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಥವಾ $9+\lambda(18)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$

ಈಗ ಸಮೀಕರಣ (1)ರಿಂದ $(x+2y+1)+\left(-\frac{1}{2}\right)(2x-y+2)=0$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ, $2x+4y+2-2x+y-2=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಳರೇಖೆಯು $y=0$ (ಅಂದರೆ, x – ಅಕ್ಷ ಆಗುತ್ತದೆ).

5. $3x-4y+1=0$ ಮತ್ತು $x-4y+8=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಓಟ $\frac{3}{2}$ ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$(3x-4y+1)+\lambda(x-4y+8)=0 \qquad ...(1)$$

x ಮತ್ತು y ಪದಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಒಂದುಗೂಡಿಸಿದಾಗ,

$(3+\lambda)x-4(1+\lambda)y+1+8\lambda=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $y=mx+c$ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಿದಾಗ,

$$y=\left[\frac{3+\lambda}{4(1+\lambda)}\right]x+\left[\frac{1+8\lambda}{4(1+\lambda)}\right]$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆ (1)ರ ಓಟ $=\frac{3+\lambda}{4(1+\lambda)}$

ದತ್ತವನ್ನಾಧರಿಸಿ, $\frac{3+\lambda}{4(1+\lambda)}=\frac{3}{2}$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ $\lambda=\frac{-3}{5}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ λ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$(3x-4y+1)+\left(\frac{-3}{5}\right)(x-4y+8)=0$ ಅಥವಾ

$12x-8y-19=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

6. $x+y-1=0$ ಮತ್ತು $2x-y+4=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $4x-y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯು

$$(x+y-1)+\lambda(2x-y+4)=0 \quad \ldots(1)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ

$x(1+2\lambda)+y(1-y)+4\lambda-1=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ, $m_1=-\dfrac{1-2\lambda}{1-\lambda}$ ...(2)

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $4x-y+5=0$ ...(3)

ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ, $m_2=4$. ಸರಳರೇಖೆಗಳು (2) ಮತ್ತು (3) ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $m_1m_2=-1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $-\left(\dfrac{1+2\lambda}{1-\lambda}\right)(4)=-1$

ಅಂದರೆ $4+8\lambda=1-\lambda$ ಅಥವಾ $\lambda=-\dfrac{1}{3}$.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$(x+y-1)+\left(\frac{-1}{3}\right)(2x-y+4)=0$$

ಅಥವಾ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಳರೇಖೆಯು $x+4y-7=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧದಲ್ಲೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

$4x-y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು $x+4y+c=0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು (-1, 2) ಆಗಿರುವುದು.

$x+4y+c=0$ ಸರಳರೇಖೆಯು (-1, 2) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ $-1+8+c=0$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ $c=-7$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x+4y-7=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

7. $5x-3y+10=0$ ಮತ್ತು $x-5y+1=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $2x-8y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2x-8y+5=0$, ಈ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $2x-8y+c=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು $\left(\frac{-47}{22}, \frac{-5}{22}\right)$ ಆಗಿರುವುದು.

ಈಗ $2x-8y+c=0$ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ

$2\left(\frac{-47}{22}\right)-8\left(\frac{-5}{22}\right)+c=0$ ಅಥವಾ $c=\frac{27}{11}$

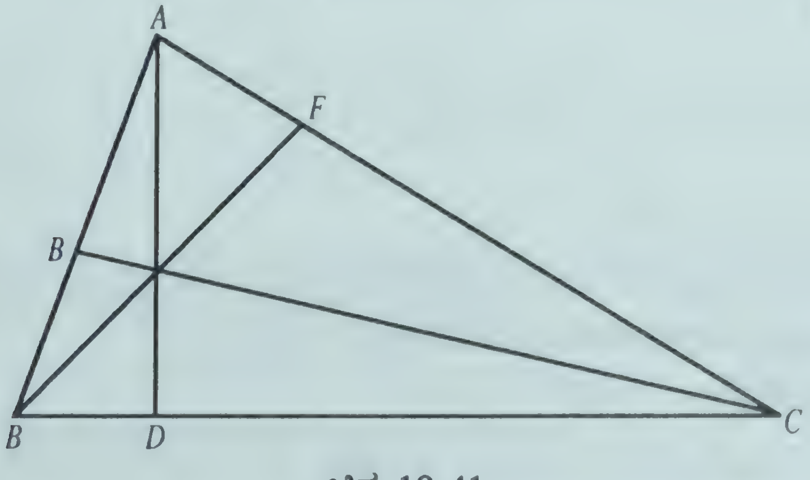
ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $22x-88y+27=0$.

8. $x-y+1=0$, $x+2y+1=0$ ಮತ್ತು $x-2y+1=0$ ಇವು ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜಗಳಾದರೆ, ತ್ರಿಕೋಣದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಭುಜಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB, BC, CA ಆಗಿರಲಿ. AD ಉನ್ನತಿಯ ಸಮೀಕರಣವ A ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದರಿಂದ $(x-y+1)+\lambda(x-2y+1)=0$

ಅಥವಾ $x(1+\lambda)-y(1+2\lambda)+(1+\lambda)=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಓಟ $m_1=\frac{1+\lambda}{1+2\lambda}$



ಚಿತ್ರ 10.41

BC ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x+2y+1=0$ ಆಗಿದ್ದು ಅದರ ಓಟ $m_2=-\frac{1}{2}$.

ಈಗ AD ರೇಖೆಯು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $m_1m_2=-1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\left(\frac{1+\lambda}{1+2\lambda}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

ಅಥವಾ $1+\lambda=2+4\lambda$ ಅಥವಾ $\lambda=-\frac{1}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ AD ಯ ಸಮೀಕರಣವು $(x-y+1)+\left(-\frac{1}{3}\right)(x-2y+1)=0$

ಅಥವಾ $2x-y+2=0$ ...(1)

ಇದೇ ರೀತಿ CE ಉನ್ನತಿಯ ಸಮೀಕರಣವು

$(x+2y+1)+\lambda(x-2y+1)=0$

$x(1+\lambda)+2y(1-\lambda)+(1+\lambda)=0$

ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ, $m_3=\frac{-(1+\lambda)}{2(1-\lambda)}$

CE ಉನ್ನತಿಯು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದು, AB ಯ ಓಟ $m_4=1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$\frac{-(1+\lambda)}{2(1-\lambda)}(1)=-1 \Rightarrow 1+\lambda=2-2\lambda \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$

ಆದ್ದರಿಂದ CE ಉನ್ನತಿಯ ಸಮೀಕರಣವು $(x+2y+1)+\frac{1}{3}(x-2y+1)=0$

ಅಥವಾ $x+y+1=0$ ...(2)

ಈಗ AD ಮತ್ತು CE ಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಾದ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದಾಗ ಲಂಬಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

ಲಂಬಕೇಂದ್ರ $\equiv$ (-1, 0).

9. $2x+3y+6$, $3x+y-5$ ಮತ್ತು $4x+5y+8=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

ಮೊದಲ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಅವುಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಆ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ≡ (3, -4)

ಮೂರನೇ ಸರಳರೇಖೆಯು ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಮೂರನೇ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ

$x = 3$, $y = -4$ ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ

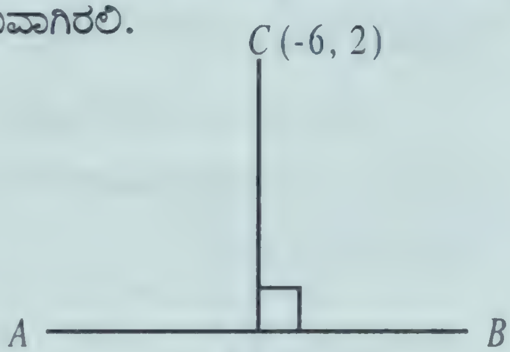
$4x + 5y + 8 = 4(3) + 5(-4) + 8 = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಮೂರು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿವೆ.

10. $3x - 4y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ (-6, 2) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪಾದದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರ. 10.42 ದಲ್ಲಿ AB ಯು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯೂ ಮತ್ತು C(-6, 2) ದತ್ತ ಬಿಂದುತ್ವವೂ ಆಗಿರಲಿ. CP ಯು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ.

AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $m = \frac{3}{4}$

$\therefore$ CP ಯ ಓಟವು $= -\frac{1}{m} = -\frac{4}{3}$



ಚಿತ್ರ 10.42

CP ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಓಟ-ಬಿಂದು ಮಾದರಿಯಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x + 6) \text{ ಅಥವಾ } 4x + 3y + 18 = 0 \qquad \ldots(1)$$

AB ಸರಳರೇಖೆಯ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ $3x - 4y + 1 = 0$ ...(2)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ AB ಮತ್ತು CP ಯ ಛೇದನ ಬಿಂದುವು (-3, -2) ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗೆ (-6, 2) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯ ಪಾದದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (-3, -2).

11. $x = 2y - 3$ ಮತ್ತು $y = 2x + 5$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

ಅಂದರೆ $\dfrac{x - 2y + 3}{\sqrt{5}} = \pm \dfrac{2x - y + 5}{\sqrt{5}}$

ಅಂದರೆ, $(x - 2y + 3) = +(2x - y + 5)$ ಮತ್ತು

$(x - 2y + 3) = -(2x - y + 5)$

ಅಥವಾ $x + y + 2 = 0$ ಹಾಗೂ $3x - 3y + 8 = 0$.

12. $3x - 4y + 2 = 0$ ಮತ್ತು $5x = 12y + 7$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $3x - 4y + 2 = 0$ ...(1)

ಮತ್ತು $5x - 12y - y = 0$ ...(2)

ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು, $\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

$$\frac{3x - 4y + 2}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{5x - 12y - 7}{\sqrt{25 + 144}}$$

ಅಥವಾ $\dfrac{3x - 4y + 2}{5} = \pm \dfrac{5x - 12y - 7}{13}$.

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು
$14x + 8y + 61 = 0$ ...(3)

ಮತ್ತು $64x - 112y - 9 = 0$ ...(4)

ನಂತರ, ಒಂದು ದ್ವಿಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಯೊಂದರ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (4) ಅಂದರೆ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆ $3x-4y+2=0$ ಮತ್ತು ದ್ವಿಭಾಜಕ $64x-112y-9=0$ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ; ಇವುಗಳ ಓಟಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $m_1=\frac{3}{4}$ ಮತ್ತು $m_2=\frac{64}{112}=\frac{4}{7}$. ಆ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನವು θ ಆಗಿದ್ದರೆ

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{\frac{3}{4}-\frac{4}{7}}{1+\frac{3}{4}\times\frac{4}{7}}\right|=\frac{1}{8}<1$$

ಅಥವಾ $\tan\theta<1$ ಅಂದರೆ $\theta<45°$ ಎಂದಾಯಿತು.

ಆದ್ದರಿಂದ $64x-112y-9=0$ "ಲಘುಕೋನ" ದ್ವಿಭಾಜಕವೆಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ. (ಉಳಿದ ದ್ವಿಭಾಜಕ ಅಂದರೆ $14x+8y+61=0$ "ಅಧಿಕಕೋನ" ದ್ವಿಭಾಜಕವಾಗಿರುವುದು).

13. $3x-y-5=0$ ಮತ್ತು $x-3y+2=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳ ಅಧಿಕಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಸಮಿಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

ಅಂದರೆ $\dfrac{3x-y-5}{\sqrt{9+1}}=\pm\dfrac{x-3y+2}{\sqrt{1+9}}$

ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$2x+2y-7=0$ ಮತ್ತು $4x-4y-3=0$.

ಈಗ ದತ್ತಸರಳರೇಖೆ $3x-y-5=0$ ಮತ್ತು ದ್ವಿಭಾಜಕ $2x+2y-7=0$ ಈ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಇವುಗಳ ಓಟಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $m_1=3$ ಮತ್ತು $m_2=-1$. ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನವು θ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{3-(-1)}{1-3}\right| = 2 > 1$$

ಅಥವಾ $\tan\theta > 1$ ಅಂದರೆ $\theta > 45^\circ$ ಎಂದಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ $2x + 2y - 7 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಯು ಅಧಿಕಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

14. a ಮತ್ತು b ಛೇದಕಗಳುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯೊಂದಕ್ಕೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬದ ಉದ್ದವು p ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

a ಮತ್ತು b ಛೇದಕಗಳುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಅಥವಾ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \qquad \ldots(1)$$

ಲಂಬದ ದೂರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, (0,0) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳರೇಖೆ (1) ಕ್ಕೆ ಲಂಬದ ದೂರ

$$p = \frac{\left|\frac{1}{a}(0) + \frac{1}{b}(0) - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}}$$

ಅಥವಾ $$p^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

ಅಂದರೆ $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p^2}$$

15. $\left(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ b^2 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

$\left(\pm\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದ ಕ್ರಮವಾಗಿ l_1 ಮತ್ತು l_2 ಎಂದಿರಲಿ. ಸೂತ್ರವನ್ನಾಧರಿಸಿ

$$l_1=\left|\frac{\frac{\cos\theta}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{\sin\theta}{b}(0)-1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}\right|$$ ಮತ್ತು

$$l_2=\left|\frac{\frac{\cos\theta}{a}\left(-\sqrt{a^2-b^2}\right)+\frac{\sin\theta}{b}(0)-1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}\right|$$

ಲಂಬಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$l_1l_2=\left|\frac{\frac{\cos\theta\sqrt{a^2-b^2}}{a}-1}{\sqrt{\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}}}\right|\left|\frac{\frac{-\cos\theta\left(\sqrt{a^2-b^2}\right)}{a}-1}{\sqrt{\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}}}\right|$$

$$=\frac{\frac{-\cos^2\theta\left(a^2-b^2\right)+a^2}{a^2}}{\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}}$$

$$= \frac{a^2 - \cos^2\theta\left(a^2 - b^2\right)}{b^2\cos^2\theta + a^2\left(1 - \cos^2\theta\right)} \times b^2$$

$$= \frac{b^2\left[a^2 - \cos^2\theta\left(a^2 - b^2\right)\right]}{\left[a^2 - \cos^2\theta\left(a^2 - b^2\right)\right]} = b^2$$

16. $7x - 2y - 5 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$ ಮತ್ತು $mx + my - 8 = 0$ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾದರೆ m ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$7x - 2y - 5 = 0$ ...(1)

$x + 7y - 8 = 0$ ...(2)

$mx + my - 8 = 0$ ...(3)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$7x - 2y = 5 \times 7$

$$\begin{array}{l} 7x - 2y = 5 \times 7 \\ \underline{x + 7y \ \ = 8 \times 2} \\ \ \ 51x \ \ = 51 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ $2y = 7x - 5 = 7(1) - 5$

$\therefore \quad y = 1$

ಅಂದರೆ, (1) ಮತ್ತು (2) ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು (1, 1).

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ $x = 1$, $y = 1$ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$m(1) + m(1) - 8 = 0$

ಅಥವಾ $2m = 8 \Rightarrow m = 4$.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.7

1. $3x-y-5=0$ ಮತ್ತು $4x+y-9=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು (4,5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x+2y+1=0$ ಮತ್ತು $4x+y-3=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $x-6y+6=0$ ಮತ್ತು $3x+y+7=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $45°$ ಬಾಗುವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $7x-y+6=0$ ಮತ್ತು $5x+y+1=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಮತ್ತು $x+3y+4=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $3x+y+6=0$ ಮತ್ತು $2x+3y+4=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $5x+6y+1=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $4x-3y=8$, $3x-4y+6=0$ ಮಂತ್ತು $x+y=9$ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಭುಜಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ತ್ರಿಕೋಣದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ ಮತ್ತು $C(-1, 0)$ ಆಗಿರುವ ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ ಮತ್ತು $C(-3, 2)$ ಆಗಿರುವ ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $x+2y=0$, $4x+3y=5$ ಮತ್ತು $3x+y=0$ ಸರಳರೇಖಖೆಗಳು ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜಗಳಾದರೆ, ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $5x-6y-1=0$ ಮತ್ತು $3x+2y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಸಮನಾದ ಛೇದಕಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $8x+y+12=0$ ಮತ್ತು $7x-3y-2=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು x- ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ -3 ಛೇದಕವನ್ನುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $x-y=6$, $4y-3x+22=0$ ಮತ್ತು $6x+5y+8=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

13. $2x+5y-8=0$, $2x+3y-4=0$ ಮತ್ತು $ax+by=1$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು $-a+2b=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾದರೆ k, ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $kx+4y-6=0$, $3x+4y=5$, $2x+3y=4$.

(ii) $x+y=3$, $2x+y=5$, $kx+3y=11$.

15. $a+b+c=0$ ಆದಾಗ $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$, $cx+ay+b=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥವಾಗುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16. (2, 1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x-4y+3=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. (2, 3) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $3x-y+5=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. $x+y-5=0$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ A ಬಿಂದುವು $6x+8y+1=0$ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ 3.5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $x+2y-1=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು (1, 3) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $2\sqrt{5}$ ಮಾನಗಳಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x+3y+6=0$ ಮತ್ತು $x+3y-1=0$

(ii) $4x+5y-4=0$ ಮತ್ತು $8x+10y+9=0$

21. $4x-3y+6=0$ ಸರಳರೇಖೆ ಮತ್ತು (3, 4) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. $2x+y+6=0$ ಮತ್ತು $x+2y+4=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರಗಳು 3 : 2 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

23. $x+2y-1=0$ ಮತ್ತು $4x+2y-3=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಜಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ.

24. $3x+y+8=0$ ಮತ್ತು $x+3y+10=0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ದ್ವಿಭಾಜಕಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳು ಇರುತ್ತವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

25. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನ ದ್ವಿಭಾಜಕದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3x-4y+5=0$ ಮತ್ತು $5x+12y-13=0$

(ii) $3x+4y-2=0$ ಮತ್ತು $12x-5y+8=0$

(iii) $x=2y-3$ ಮತ್ತು $y=2x+5$

10.8 ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು

ನಾವು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ವಿವಿಧ ರೂಪಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ ಒಂದನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣ $ax+by+c=0$, ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ $ax+by=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಓಟ-ಛೇದಕ ರೂಪವನ್ನಾಧರಿಸಿ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು $y=mx$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವವರಿದ್ದೇವೆ.

10.8.1 ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ

$y=m_1x$ ಮತ್ತು $y=m_2x$ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾದ ಹಾಗು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $(y-m_1x)(y=m_2x)=0$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$$y^2-(m_1+m_2)xy+(m_1m_2)x^2=0$$

ಅಥವಾ (ಒಟಗಳಗುಣಲಬ್ಧ) x^2- (ಒಟಗಳ ಮೊತ್ತ) $xy+y^2=0$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು,

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \qquad \ldots(1)$$

$ax^2+2hxy+by^2=0$, ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x ಮತ್ತು y ನಲ್ಲಿರುವ "ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮಜಾತೀಯ" ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣ. ಸಮೀಕರಣ (1) ಅನ್ನು ಸರಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಈ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ.

$ax^2+2hxy+by^2=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\frac{y}{x}$ ನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$b\left(\frac{y}{x}\right)^2+2h\left(\frac{y}{x}\right)+a=0.$$

ಅಥವಾ $$\frac{y}{x}=\frac{-2h\pm\sqrt{4h^2-4ab}}{2b}=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b}$$

ಅಥವಾ $$y=\left(\frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b}\right)x$$

ಇದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

(i) $$y=\left(\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b}\right)x$$ ಮತ್ತು

(ii) $y = \left(\frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b}\right)x$

ಇವುಗಳ ಓಟಗಳು, $m_1 = \frac{-h + \sqrt{h^2 - ab}}{b}$ ಮತ್ತು

$m_2 = \frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b}$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b} \text{ ಮತ್ತು } m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

ಸೂಚನೆ :

1. $h^2 - ab > 0$ ಆದಾಗ, m_1 ಮತ್ತು m_2 ಗಳು ನೈಜ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

2. $h^2 - ab = 0$ ಆದಾಗ, $m_1 = m_2$. ಅಂದರೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ.

3. $h^2 - ab < 0$ ಆದಾಗ, m_1 ಮತ್ತು m_2 ಗಳು ಮಿಶ್ರಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಗಳೂ ಊಹ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

10.8.2 ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ

ಮೇಲಿನ ವಿವರಣೆಯಿಂದ, $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$ ಮತ್ತು $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ವಡುವಿನ ಲಘು ಕೋನ θ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಸೂತ್ರದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

ಈಗ, $m_1 - m_2 = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}$ ($(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$, ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ)

$$= \sqrt{\left(\frac{-2h}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{b}$$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{b}}{1 + \frac{a}{b}}\right| = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$$

ಸೂಚನೆ :

1. ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ $\theta = 90°$ ಅಂದರೆ $\tan\theta \to \infty$ ಅಥವಾ $a + b = 0$

2. ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾದವುಗಳಾದಾಗ $\theta = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\tan\theta = 0$ ಅಥವಾ $h^2 - ab = 0$

10.8.3 ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಈ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು.

ದತ್ತ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಓಟಗಳು m_1 ಮತ್ತು m_2 ಆಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\left(\frac{-1}{m_1}\right)$ ಮತ್ತು $\left(\frac{-1}{m_2}\right)$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ ಇರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$y=\left(\frac{-1}{m_1}\right)x$ ಮತ್ತು $y=\left(\frac{-1}{m_2}\right)x$ ಅಥವಾ $m_1 y + x = 0$ ಮತ್ತು $m_2 y + x = 0$.

ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟಾರೆ ಸಮೀಕರಣ, $(m_1 y + x)(m_2 y + x) = 0$

ಅಥವಾ $x^2 + (m_1 + m_2)xy + (m_1 m_2)y^2 = 0$ ...(1)

ಆದರೆ, ಈ ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದಂತೆ $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$ ಮತ್ತು $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$x^2 + \left(\frac{-2h}{b}\right)xy + \left(\frac{a}{b}\right)y^2 = 0$ ಅಥವಾ $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$

ಉದಾಹರಣೆ : $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಜೋಡಿಯ ಸಮೀಕರಣವು $x^2 + 5xy + 6y^2 = 0$.

10.8.4. ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ನಿಯಮ.

ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ಆಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟಾರೆ ಸಮೀಕರಣ $(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$

ಅಥವಾ $$a_1 a_2 x^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)xy + b_1 b_2 y^2 + (a_1 c_2 + c_1 a_2)x + (b_1 c_2 + c_1 b_2)y + c_1 c_2 = 0$$

ಈ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಈ ರೀತಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು:

$\mathbf{ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$ ...(1)

(1) ಅನ್ನು x- ನಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ

$$ax^2 + 2x(hy+g) + (by^2 + 2fy + c) = 0 .$$

ಆಗ $x = \dfrac{-2(hy+g) \pm \sqrt{4(hy+g)^2 - 4a(by^2 + 2fg + c)}}{2a}$

ಅಥವಾ $ax = -(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fg + c)}$

$$ax + hy + g = \pm\sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fg + c)}$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದಾದರೆ, $(hy+g)^2 - a(by^2 + 2f + c)$ ಒಂದು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗವಾಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ $y^2(h^2 - ab) + 2y(hg - af) + g^2 - ac$ ಎಂಬ ವರ್ಗೋಕ್ತಿಯ ಶೋಧಕವು (ಡಿಸ್ಕ್ರಿಮಿನೆಂಟ್) ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ $4[(gh - af)^2 - (h^2 - ab)(g^2 - ac)] = 0$

$\Rightarrow a[-abc - 2hgf + af^2 + bg^2 + ch^2] = 0$, $a \neq 0$

ಅಥವಾ $\mathbf{abc + 2hgf - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0}$

ಇದು ಸಮೀಕರಣ (1) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಪೂರೈಸಬೇಕಾದ ನಿಯಮ.

ಸೂಚನೆ : (i) ಈ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕ (ಡಿಟರ್ಮಿನೆಂಟ್) ರೂಪದಲ್ಲೂ ಬರೆಯಬಹುದು :-

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

(ii) ಸಮೀಕರಣ (1) ಈ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸದಿದ್ದರೆ ಆಗ ಅದು ಒಂದು ಶಂಕುಜವನ್ನೇ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 1 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.

ಸಾಧನೆ : $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$, ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$l_1x+m_1y+n_1=0 \text{ ಮತ್ತು } l_2x+m_2y+n_2=0 \qquad ...(1)$$

ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \equiv$$
$$(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2)$$

ಎರಡು ಬದಿಯ ಅನುರೂಪವಾದ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$$l_1l_2=a,\ m_1m_2=b,\ n_1n_2=c,\ l_1m_2+l_2m_1=2h$$

$$l_1n_2+l_2n_1=2g \text{ ಮತ್ತು } m_1n_2+m_2n_1=2f \qquad ...(2)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು $l_1x+m_1y=0$ ಮತ್ತು $l_2x+m_2y=0$ ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟಾದ ಸಮೀಕರಣ,

$$(l_1x+m_1y)(l_2x+m_2y)=0$$

ಅಥವಾ $(l_1l_2)x^2+(l_1m_2+l_2m_1)xy+(m_1m_2)y^2=0$

ಸಮೀಕರಣ (2) ರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ.

ಸೂಚನೆ : (i) ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಒಂದು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ,

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘು ಕೋನವು

$$\tan\theta=\left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right|$$

(ii) ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತಿದ್ದು,

(a) $a+b=0$ ಆದಾಗ ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(b) $h^2-ab=0$ ಆದಾಗ ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಅಥವಾ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುವುವು.

10.8.5 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಬಿಂದು

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad ...(1)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಿ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು (x_1, y_1) ಆಗಿರಲಿ. ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು (x_1, y_1)ಗೆ ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸಿದಾಗ ಹೊಸ ಅಕ್ಷಗಳು ಮೊದಲ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (1)

$$a(x+x_1)^2+2h(x+x_1)(y+y_1)+b(y+y_1)^2+2g(x+x_1)+2f(y+y_1)+c=0$$

ಅಥವಾ

$$ax^2+2hxy+by^2+2(ax_1+hy_1+g)+2(hx_1+by_1+f)y+$$

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \qquad ...(2)$$

ಸಮೀಕರಣ (2)ರ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಹೊಸಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು x, y ನ ಸಹಾಂಕಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕು.

ಅಂದರೆ $\qquad ax_1+hy_1+g=0 \qquad ...(3)$

$$hx_1+by_1+f=0 \qquad ...(4)$$

ಮತ್ತು $ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \; ...(5)$

ಸಮೀಕರಣ (3) ಮತ್ತು (4) ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ (1) ರ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

$$(x_1, y_1)=\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{gh-af}{ab-h^2}\right), \left(ab \neq h^2\right)$$

10.8.6. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬೇಕಾದ ನಿಯಮ.

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \dots (1)$$

ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಿ. ಇದನ್ನು a ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$a^2x^2+2haxy+aby^2+2agx+2afy+ac=0$$

$$a^2x^2+2ax(hy+g)=-aby^2-2afy-ac=0$$

x ನಲ್ಲಿ ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಎರಡೂಬದಿಯಲ್ಲಿ $(hy+g)^2$ ಪದವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

$$a^2x^2+2ax(hy+g)+(hy+g)^2=$$
$$(hy+g)^2-aby^2-2afy-ac$$

ಅಥವಾ

$$(ax+hy+g)^2=(h^2-ab)y^2+2y(gh-af)+(g^2-ac).$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ y^2 ಮತ್ತು y ಗಳ ಸಹಾಂಕಗಳು ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ ಮತ್ತು $g^2-ac>0$ ಆದಾಗ ಸಮೀಕರಣ (1) ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$h^2=ab$ ಮತ್ತು $gh=af$ ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು $(ax+hy+g)^2=g^2-ac>0$ ಆದಾಗ

$$ax+hy+g=\pm\sqrt{g^2-ac}$$

ಅಥವಾ $$ax+hy+g-\sqrt{g^2-ac}=0 \qquad \dots (1)$$

$$ax+hy+g+\sqrt{g^2-ac}=0 \qquad \dots (2)$$

ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದ (1) ಮತ್ತು (2) ರ ಓಟಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದು $\frac{-a}{h}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(1) ಮತ್ತು (2) ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ

$$d = \left| \frac{\left(g + \sqrt{g^2 - ac}\right) - \left(g - \sqrt{g^2 - ac}\right)}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right|$$

ಅಥವಾ $d = \left| \frac{2\sqrt{g^2 - ac}}{\sqrt{a^2 + ab}} \right| \left(\because h^2 = ab\right)$

$$\therefore \mathbf{d} = \left| 2\sqrt{\frac{\mathbf{g^2 - ac}}{\mathbf{a(a + b}}} \right|$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $4x^2 - 24xy + 11y^2 = 0$ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಿಂದ

$$4x^2 - 24xy + 11y^2 \equiv (2x - y)(2x - 11y)$$

ಅಥವಾ $2x - y = 0$ ಮತ್ತು $2x - 11y = 0$

ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನ, $\tan\theta = \left| \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} \right|$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

$$\tan\theta = \left| \frac{2\sqrt{144 - 44}}{4 + 11} \right| = \frac{2 \times 10}{15} = \frac{4}{3}$$

ಅಥವಾ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

2. $12x^2+7xy+by^2+13x-y+3=0$ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, b ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$a = 12,\ c = 3,\ h=\frac{7}{2},\ g=\frac{13}{2},\ f=\frac{-1}{2}.$

ನಿಯಮದಂತೆ, ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬೇಕಾದರೆ

$abc+2hgf-af^2-bg^2-ch^2=0$

ಅಂದರೆ,

$$(12)(b)(3)+2\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{13}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)-12\left(\frac{1}{4}\right)-b\left(\frac{169}{4}\right)-3\left(\frac{49}{2}\right)=0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ b = -10 ಆಗುವುದು.

3. $y^2+xy+-2x^2-5x-y-2=0$ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ; ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ a = -2, b = 1, c = -2, $h=\frac{1}{2}$, $g=\frac{-5}{2}$, ಮತ್ತು

$f=\frac{-1}{2}.$

ನಿಯಮಾನುಸಾರ $abc+2hgf-af^2+bg^2-ch^2=0$ ಆಗಿರಬೇಕು

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಎಡಬದಿ

$$\equiv(-2)(1)(-2)+2\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-(-2)\left(\frac{1}{4}\right)-(1)\left(\frac{25}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=4+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}-\frac{25}{4}+\frac{1}{2}=\frac{20+5-25}{4}=\frac{0}{4}=0\equiv \text{ ಬಲಬದಿ}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಬಿಂದು = $\left[\frac{hf-bg}{ab-h^2},\frac{hg-af}{ab-h^2}\right]$

$$=\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)-(1)\left(\frac{-5}{2}\right)}{(-2)(1)-\left(\frac{1}{4}\right)},\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)-(-2)\left(\frac{-1}{2}\right)}{(-2)(1)-\left(\frac{1}{4}\right)}\right]\equiv(-1,1)$$

4. $x^2+2xy+y^2-8ax-8ay-9a^2=0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಿಯಮಾನುಸಾರ, $h^2=ab$ ಮತ್ತು $af^2=bg^2$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ದತ್ತಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ a = 1, b = 1, h = 1, g = -4a, f = -4a $c=-9a^2$

$$h^2=(1)^2=(1)(1)=ab \qquad \text{... (1)}$$

$$af^2=(1)(16a^2)=bg^2 \qquad \text{... (2)}$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದು ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $d=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

$$d=2\sqrt{\frac{16a^2+9a^2}{1+1}}=\sqrt{2}\sqrt{25a^2}=5\sqrt{2}a$$ ಮಾನಗಳು.

5. $(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2=(x^2+y^2)\sin^2\alpha$, ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವು 2α ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ

$$(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2=(x^2+y^2)\sin^2\alpha$$

ಅಂದರೆ,

$$x^2\cos^2\alpha+y^2\sin^2\alpha-2xy\cos\alpha\sin\alpha=x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\alpha$$

ಅಥವಾ $x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-2xy\cos\alpha\sin\alpha=0$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು $ax^2+2hxy+by^2=0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $a=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, $h=-\sin\alpha\cos\alpha$, $b=0$

ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಲಘುಕೋನ θ ಪಡೆಯಲು ಸೂತ್ರ

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

ಇದನ್ನು ಆಧರಿಸಿ

$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha-0}}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

ಅಥವಾ $\tan\theta=\tan 2\alpha$ ಅಥವಾ $\theta=2\alpha$

6. $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-3x-3\sqrt{3}y-4=0$, ಈ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದಾಗ

$x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2=(x+\sqrt{3}y)^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ,

$$x^2+2\sqrt{3}xy+3y-3x-3\sqrt{3}y-4\equiv(x+\sqrt{3}y+l)(x+\sqrt{3}y+m)$$

ಆಗಿರಲಿ. ಅಜ್ಞಾತವಾದ l ಮತ್ತು m ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿದಾಗ

$m+l=-3$ ಮತ್ತು $ml=-4$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡನೆಯದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವುದರಿಂದ

$$m(-3-m)=-4\Rightarrow -3m-m^2=-4$$

ಅಥವಾ $m^2+3m-4=0$ ಅಥವಾ $(m+4)(m-1)=0\Rightarrow m=-4$

ಅಥವಾ $m=1$

(i) $m=1$ ಆದರೆ

$l=-3-m=-4$

(ii) $m=-4$ ಆದರೆ $l=-3+4$ ಅಥವಾ $l=1$

ದತ್ತ ಜೋಡಿಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು $x\sqrt{3}y-4=0$ ಮತ್ತು

$x+\sqrt{3}y+1=0$

ಸೂತ್ರವನ್ನಾಧರಿಸಿ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ

$$= \left| \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{-4 - 1}{\sqrt{1 + 3}} \right| = \frac{5}{2}.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.8

1. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $8x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$

(b) $6x^2 - 5xy + y^2 = 0$

(c) $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$

2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವು ಇನ್ನೊಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟದ ಎರಡರಷ್ಟಿದ್ದರೆ $8h^2 = 9ab$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3. ತ್ರಿಕೋಣವೊಂದರ ಭುಜಗಳು $12x^2 - 20xy + 7y^2 = 0$ ಮತ್ತು $2x - 3y + 4 = 0$ ಆದರೆ, ತ್ರಿಕೋಣದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಮತ್ತು $lx + my - 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ರಚಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $\dfrac{\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hlm + bl^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $ax^2 + 3hxy + by^2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $\dfrac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

(a) $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + 2 = 0$

(b) $2x^2 + xy - y^2 - 3x + 6y - 9 = 0$

(c) $3x^2 - 17xy - 28y^2 + x + 18y - 2 = 0$

7. $x^2 + 5xy + 4y^2 + 3x + 2y + \lambda = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ

ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ λ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $x^2 + \lambda xy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ λ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $3x^2 + 10xy + 8y^2 + 14x + 22y + 15 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 3x - 3\sqrt{3}y - 4 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮಾಂತರವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $ax^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + c = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಲಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, a ಮತ್ತು c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$ ಮತ್ತು

$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಚೌಕದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

15. $ax + by + c = 0$ ಮತ್ತು $(ax + by)^2 - 3(ay - bx)^2 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16. $ax^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ-11

ಮಿತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ

11.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವು ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡಿದೆ. ಹದಿನೇಳನೆಯ ಶತಮಾನದಿಂದೀಚೆಗೆ ಹಲವಾರು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ ತಜ್ಞರು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ ಬಂದರು. ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಕೀರ್ತಿಯು ಪ್ರಮುಖವಾಗಿ ಇಬ್ಬರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ತಜ್ಞರಾದ ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನ ಸರ್. ಐಸಾಕ್ ನ್ಯೂಟನ್ (1642-1727) ಹಾಗೂ ಜರ್ಮನಿಯ ಲೈಬ್ನಿಟ್ಸ್ (1646-1716) ರವರಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಹದಿನೆಂಟನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಲಿಯೋನಾರ್ಡ್ ಆಯ್ಲರ್ ಮತ್ತು ಇನ್ನೂ ಹಲವಾರು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವು ಬೆಳವಣಿಗೆ ಅಥವಾ ಕುಂಠಿತವಾದದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿದೆ. ಯಾವುದೇ ಜೀವಿಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಅಲ್ಪಕಾಲದ ನಂತರ ಅಳೆಯಬೇಕೆಂದರೆ ಅದು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಷ್ಟ ಸಾಧ್ಯ. ಏಕೆಂದರೆ ಅದು ಬಹಳ ಸಣ್ಣ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಅನಂತಾಲ್ಪ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯಗಾಮೀ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಬುನಾದಿ ಶೂನ್ಯಗಾಮೀ.

ಗಮನಿಸಿ : ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಖಗೋಲ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕಲನಾಂಶದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ $[d(\sin\theta)=(\cos\theta)d\theta]$ ಮಂಜುಲಾಚಾರ್ಯನ (ಕ್ರಿ.ಶ 932) **ಲಘುಮಾನಸಂ** ಎಂಬ ಕರಣಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಇದೇ ಪರಿಕಲ್ಪನೆ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯದ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಲನಾಂಶವು ಶೂನ್ಯ $[ds/dt=0]$ ಎಂಬ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಭಾಸ್ಕರ-II ಅವರಿಂದ ರಚಿತ **ಸಿದ್ಧಾಂತ ಶಿರೋಮಣಿ**ಯಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

11.2 ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯಗಳು

11.2.1 ಚರಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಗಳು

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಚರಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಗಳು ಪ್ರಮುಖವಾದದ್ದು.

ಒಂದುಭೌತಿಕ ಪರಿಮಾಣವು ಯಾವುದೇ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಲೆಖ್ಖಾಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ ಒಂದೇ ನಿಯತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ಸ್ಥಿರಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. **ಪರಿಮಾಣವು** ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು **ಚರಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳು

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ ಅದನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಚರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ, $c = 2\pi r$; ಇಲ್ಲಿ $r =$ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ 2π ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಥಿರ ಹಾಗು c ಮತ್ತು r ಚರಗಳು. ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪರಿಧಿಯು ಸಹ ಒಂದು ವೃತ್ತದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ 2π ಮಾತ್ರ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಆಂಗ್ಲಭಾಷೆಯ $a, b, c, d, \ldots\ldots o$ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಹಾಗೂ $p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ಚರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಚರಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಧಗಳಿವೆ. ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ ಹಾಗೂ ಅಧೀನ ಚರ. ಒಂದು ನಿಯಮದಂತೆ ಎರಡು ಚರಗಳು ಸೂಚಿಸುವ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾ : $y = x + 5$, $3y = 2x - 3$ ....

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ x ತನ್ನ ಅವಕಾಶದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡಾಗ y ಕೂಡ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದುವುದು. ಇಲ್ಲಿ x ನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ ಮತ್ತು y ನ್ನು ಅಧೀನ ಚರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : πr^2 : ಇಲ್ಲಿ A ಅಧೀನ ಚರ, $r =$ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ.

ಎರಡು ಗಣಗಳಾದ A ಮತ್ತು B ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು $x \in A$ ನಮಗೆ ಒಂದೇ $y \in B$ ನಿಯಮ ಪಾಲನೆಯಾದರೆ ಇದನ್ನು **ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $f : A \rightarrow B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯವನ್ನು $y = f(x)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

11.2.2 ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯಗಳ ವಿಧಗಳು

(i) ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ :

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ x ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದಾಗ, ಅಧೀನ ಚರ y ಒಂದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದರೆ ಅದನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾ : $y = f(x) = 3$

(ii) ಬೀಜ ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯ :

ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಹಾರ ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಘಾತಗಳು ಕೇವಲ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸೀಮಿತವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಬೀಜ ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $f(x)=2x-3$, $f(x)=x^2-2x+3$

(iii) ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯಗಳು :

ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಸ್ವತಂತ್ರಚರದ ತ್ರಿಕೋಣ ಮಿತಿ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾ : $f(x)=2\sin^2 x-3\cos x+3$

ಸೂಚನೆ : ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯಗಳು ಅಬೀಜೀಯ (ನಾನ್-ಆಲ್ಜಿಬ್ರಿಯಾಕ್) ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(iv) ಘಾತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು :

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ, e^x, e^{2x}, e^{-x} ...... ಮುಂತಾದ ಪದಗಳಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಘಾತೀಯ (ಎಕ್ಸಪೊನೆಂಷಿಯಲ್) ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $f(x)=2e^{3x}-e^x+4$

ಸೂಚನೆ : ಇಲ್ಲಿ e ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಬೆಲೆ $e=2.718281828459045$ ....

(v) ಪ್ರತಿಘಾತ ಉತ್ಪನ್ನ :

$f(x)=2\log x-(\log x)^2+3$ ರೀತಿಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

11.2.3 ಸಮ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯಗಳು

(i) ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನ : ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ $f(x)$ ನಲ್ಲಿ $f(-x)=f(x)$ಗೆ ಸಮವಾದರೆ ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಚರ ಸಂಖ್ಯೆ xನ ಬದಲಿಗೆ $(-x)$ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾ: (i) $f(x)=2x^6-3x^2+2$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ $f(-x)=2(-x)^6-3(-x)^2+2 \quad =2x^6-3x^2+2$

$\therefore \quad f(-x)=f(x)$

(ii) $f(x)=2\cos x-3\sin^2 x+5$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad f(x) = 2\cos(-x) - 3\sin^2(-x) + 5 \quad = 2\cos x - 3\sin^2 x + 5$

$\therefore \quad f(-x) = f(x)$

(ಆ) ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನ : ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯ $f(x)$ ನಲ್ಲಿ $f(-x) = -f(x)$ ಗೆ ಸಮವಾದರೆ ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (i) $f(x) = 4x^3 - 3x$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad f(-x) = 4(-x)^3 - 3(-x) \quad = -4x^3 + 3x \quad = -[4x^3 - 3x]$

$\therefore \quad f(-x) = -f(x)$

ಸೂಚನೆ : (i) ಬೆಸ ಘಾತಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬೈಜಿಕ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾದ x, x^3, x^5 ...... ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(ii) ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾದ $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$ ಬೆಸ ಘಾತಗಳು ಹಾಗೂ $\cos x$ ಮತ್ತು $\sec x$ ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು. ಇವುಗಳ ಸಮ ಘಾತಗಳು ($\sin^2 x$, $\tan^4 x$,.......) ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು.

(iii) ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ಸರಿಯೂ ಅಲ್ಲದೆ ಬೆಸವೂ ಅಲ್ಲದೆ ಇರಬಹುದು.

ಉದಾ : e^x, $\log x$, $x + x^2 - 5$.

11.2.4 ಅವಧಿಯುತ ಉತ್ಪನ್ನ

n ಯಾವುದೇ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆದಾಗ

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = ... = f(x+nT)$$

ಆಗಿದ್ದರೆ, $f(x)$ ನ್ನು ಅವಧಿಯುತ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆಗ, ಈ ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯದ ಅವಧಿ T ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $f(x) = \sin x$ ಆಗಿರಲಿ,

ಆಗ, $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x$

$\sin x$ ಒಂದು ಅವಧಿಯುತ ಉತ್ಪನ್ನ ಇದರ ಅವಧಿ 2π

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ಆದರೆ $f(2)$ ಮತ್ತು $f(-1)$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$\therefore\ f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$

$f(-1) = 2(-1)^2 + 3(-1) + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$

2. $f(x) = 3\cos x - 2\sin x + 4$ ಆದರೆ $f(\pi)$ ಮತ್ತು $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$f(x) = 3\cos x - 2\sin x + 4$

$\therefore\ f(\pi) = 3\cos\pi - 2\sin\pi + 4 = 3(-1) - 2(0) + 4 = 1$

ಮತ್ತು $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{\pi}{4} + 4$

$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 4 = \frac{3 - 2 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

3. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $f(x) = 3x^5 + 4x^3 - 3x$

$\therefore\ f(-x) = 3(-x)^5 + 4(-x)^3 - 3(-x)$

$= -3x^5 - 4x^3 - 3x \ = -[3x^5 + 4x^3 + 3x]$

ಅಂದರೆ, $f(-x) = -f(x)$ $\therefore$ $f(x)$ ಒಂದು ಬೆಸ ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯ.

(ii) $f(x) = 4x^2 + 2\cos x + 3$

$\therefore\ f(-x) = 4(-x)^2 + 2\cos(-x) + 3 \ = 4x^2 + 2\cos x + 3$

ಅಂದರೆ, $f(-x) = f(x)$ $\therefore$ ಒಂದು ಸಮ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ

(iii) $f(x) = 2x^3 - 3\sin x + 4$

$\therefore\ f(-x) = 2(-x)^3 - 3\sin(-x) + 4$

$= -2x^3 + 3\sin x + 4 \quad [\neq f(x)]$

$= -[2x^3 - 3\sin x - 4] \quad [\neq -f(x)]$

ಅಂದರೆ, $f(-x) \neq f(x)$ ಮತ್ತು $f(-x) \neq -f(x)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಸಮವೂ ಅಲ್ಲದೆ ಬೆಸವೂ ಅಲ್ಲದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ

4. $f(x) = \log_e x$ ಆದರೆ $f(xy)$ ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$f(x) = \log_e x$

$\therefore \quad f(xy) = \log_e(xy) \quad = \log_e x + \log_e y$

ಆದರೆ $f(x) = \log_e x$ ಮತ್ತು $f(y) = \log_e y$

$\therefore \quad f(xy) = f(x) + f(y)$

ಸೂಚನೆ: ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಾದ e ಅನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು $(\log_e x)$ ಆಧಾರವಾದ e ಅನ್ನು ಬರೆಯದೆಯೇ $(\log x)$ ಸೂಚಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ. e ಅಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಧಾರವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಲೇಬೇಕು.

ಉದಾ : $\log_{10} x$, $\log_a 10$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. $f(x)=2x^2+3x+1$ ಆದರೆ $f(1), f(2)$ ಮತ್ತು $f(-2)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}$ ಆದರೆ $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\sin x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $g(x)=2\cos x-\cos 2x$ ಆದರೆ $g(0)$ ಮತ್ತು $g(\pi)$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $f(x)=\log_e x$ ಆದರೆ $f(xy)$ ಮತ್ತು $f\left(x/y\right)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $f(x)=10^x$ ಆದಾಗ $f(a)f(b)=f(a+b)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\log x$ ಆದಾಗ $f(x)=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಬೆಸ ಮತ್ತು ಸರಿ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ವಿಂಗಡಿಸಿ :

(i) $8x^2+\cos 2x+3$

(ii) $3x^5+4x^3-3x$

(iii) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(iv) $6x^4+3x^2+17$

(v) $\operatorname{cosec}^3 x+2\cot x\cos x+5$

(vi) $4x^2+2\cos x+\sec 3x$

11.3 ಉತ್ಪನ್ನ ಮಿತಿ

'n' ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಬಹು ಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $A=$ (ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ - ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಾಗ A ನ ಬೆಲೆಯು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದು. ಅಂದರೆ ವೃತ್ತದ ಹಾಗೂ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಚಿಕ್ಕದಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದು. 'n' ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಬಹಳವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಮಾಡಿದಾಗ (ಅಂದರೆ $n\to\infty$) ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬಹುಭಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

$n\to\infty$ ಹೋದಂತೆ $A\to 0, (A\neq 0)$ ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ A ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದು. ಇದನ್ನು ನಾವು A ಚರವಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಿತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು $\lim_{n\to\infty} A=0$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಶಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯ ಸರಿಯಾದ ಅರ್ಥವು ತಿಳಿಯುವುದು.

$y=2x+3$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರವಾದ x ಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅಧೀನ ಚರ y ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

$x=1$	ಆದಾಗ	$y=2(1)+3=5$
$x=1.01$	ಆದಾಗ	$y=2(1.01)+3=5.02$
$x=1.001$	ಆದಾಗ	$y=2(1.001)+3=5.002$
$x=1.0001$	ಆದಾಗ	$y=2(1.0001)+3=5.0002$
$x=0.99$	ಆದಾಗ	$y=2(0.99)+3=4.98$
$x=0.999$	ಆದಾಗ	$y=2(0.999)+3=4.998$

ಸ್ವತಂತ್ರಚರ x ನ ಬೆಲೆಗಳಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು (1ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗಿ) ಇದ್ದಾಗ y ನ ಬೆಲೆಗಳು 5ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ x ಚರವು 1ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗುತ್ತಿದ್ದ ಹಾಗೆ y ಚರವು 5ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು ನಾವು $\lim_{x\to 1} y=5$ ಅಥವಾ $\lim_{x\to 1}(2x+3)=5$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

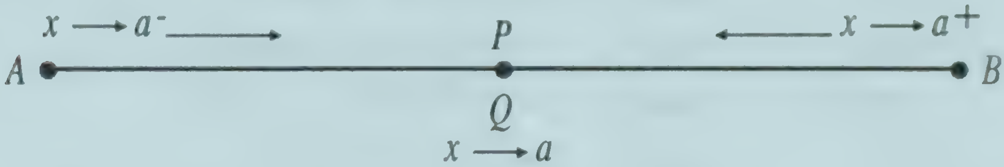
11.4 ಮಿತಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ $y=f(x)$ ಚರವನ್ನು $|x-a|$ ಅನೃಣಾತ್ಮಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅಲ್ಪವಾಗಿರುವಂತೆ ಆರಿಸುವುದರಿಂದ, $|y-L|$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಅಲ್ಪವನ್ನಾಗಿ ಬೇಕಾದರೂ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ, $y=f(x)$ ಬೆಲೆಯು L ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದೆ ಅಥವಾ L ಎಂಬುದನ್ನು $f(x)$ ನ ಮಿತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು x ಚರವು a ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ $f(x)$ ಚರದ ಬೆಲೆಯು L ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು ಎಂದು ಓದಬೇಕು.

ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಉತ್ಪನ್ನ ಮಿತಿಗಳು

$f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯಲ್ಲಿ x ಚರವು a ಸ್ಥಿರವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವಾಗ $(x\to a)$ 'a' ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು $f(x)$ ನ ಬಲ ಉತ್ಪನ್ನ ಮಿತಿ (RHL) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ಅಥವಾ $\lim_{x\to a+0} f(x)=RHL$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ, ಚರವು a ಸ್ಥಿರವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ $(x\to a)$, aಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದುತ್ತಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು $f(x)$ನ ಎಡ ಉತ್ಪನ್ನಮಿತಿ LHL ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ ಅಥವಾ $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) =$ LHL ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 11.1 ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 11.1 ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಮಿತಿಗಳು

ಉತ್ಪನ್ನ ಮಿತಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ ಗುಣಗಳು :

1. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a}\left[K(x)\right] = K \lim\limits_{x\to a} f(x)$, K. ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\, g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to a}\left[\log f(x)\right] = \log\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$

(***ಸೂಚನೆ :*** ಇಲ್ಲಿ log ಉತ್ಪನ್ನವು $x=a$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು, ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಕ್ತವಾದ ಒಂದು ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಬೆಲೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬೇಕು.)

ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನ :

ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ $y=f(x)$ನ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಮೊದಲಿಗೆ x ಬೆಲೆಯನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ನೋಡಬೇಕು. ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದೇ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯವು ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ

ರೂಪವನ್ನುಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅಂಶ ಅಥವಾ ಛೇದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಂಡು ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯದ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$\lim_{x\to a}\left[2x^2-3x+1\right]$$

$$\lim_{x\to a}\left[2x^2-3x+1\right]= 2(2)^2-3(2)+1=8-6+1=3$$

2. $$\lim_{x\to 2}(x+3)(2x-1)$$

$$=\ (2+3)(2\times2-1)=5(4-1)=15$$

3. $$\lim_{x\to 2}\left[\frac{3x^2-4x-1}{2x^2+2x-3}\right]$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+2x-3)}=\frac{(3-4+1)}{(2+2-3)}=0$$

4. $$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right]$$

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\quad f(3)=\frac{3^2-5(3)+6}{3^2-9}=\frac{0}{0}$$ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟರೂಪ

ಅಂದರೆ $x=3$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪ ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ

$$\therefore\ \lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}\right],\ [x\neq 3]$$

$$=\ \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{(x+3)}=\frac{1}{6}$$

5. $$\lim_{x\to -1}\left[\frac{x^3+1}{2x^2+5x+3}\right]$$

$$f(x)=\frac{x^3+1}{(2x^2+5x+3)}$$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad f(-1)=\frac{-1+1}{2-5+3}=\frac{0}{0}$$ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪ

ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{x^3+1}{2x^2+5x+3}\right]=\lim_{x\to -1}\left[\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(2x+3)(x+1)}\right]$$

$$=\lim_{x\to -1}\left[\frac{x^2-x+1}{(2x+3)}\right],\ x+1\neq 0$$

$$=\frac{1+1+1}{(-2+3)}=3$$

6. $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^3-(1-x)^3}{x+x^3}\right]$$

$$f(x)=\frac{(1+x)^3-(1-x)^3}{x+x^3}$$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore f(0)=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$, ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪ

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^3-(1-x)^3}{x+x^3}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x^3+3x+3x^2)-(1-x^3-3x+3x^2}{x(1+x^2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x^3+6x}{x(1+x^2)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x(x^2+3)}{x(1+x^2)}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2(x^2+3)}{(1+x^2)}, x \neq 0$$

$$= \frac{2(0+3)}{1+0} = 6$$

7. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right] = -1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\text{LHS} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2+x-2}{(1-x^3)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{-(x+2)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}\right] \quad (x \neq 1)$$

$$= \frac{-3}{3} = -1,$$

i.e., LHS = RHS

8. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}\right]$

$f(x) = \left[\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}\right]$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore f(2) = \left[\frac{2^2-4}{\sqrt{2+2}-\sqrt{3\times 2-2}}\right] = \frac{0}{0}$ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪ

ಈಗ, $\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}\right]$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x^2-4)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{(x+2)-(3x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2}\right], x\neq 2$$

$$= (2+2)\left(\frac{\sqrt{2+2}+\sqrt{6-2}}{-2}\right)=\frac{4(4)}{-2}=-8.$$

9. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-3x+4}{3x^2+4x-5}\right]$

$f(x)=\frac{2x^2-3x+4}{3x^2+4x-5}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಚರ x ಅನಂತವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ, x ಗೆ ∞ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$f(\infty)=\frac{2\infty^2-3(\infty)+4}{3(\infty)^2+4(\infty)-5}=\frac{\infty}{\infty}$ ಎಂಬ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಿರುವ x ನ ಗರಿಷ್ಟಘಾತ x^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-3x+4}{3x^2+4x-5}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2\left(2-3/x+4/x^2\right)}{x^2\left(3+4/x-5/x^2\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2-3/x+4/x^2}{3+4/x-5/x^2}\right], x\neq 0$$

$x\to\infty$ ಆದಾಗ $1/x$ ಮತ್ತು ಅದರ ಧನಾತ್ಮಕ ಘಾತಗಳಾದ $1/x^2, 1/x^3 ....\to 0$

$\therefore$ ಮಿತಿ $=\frac{2}{3}$

10. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n^2-4n+5}{4n^3-n+7}\right]$$

$$f(n)=\frac{3n^2-4n+5}{4n^3-n+7}$$

$n\to\infty$ ಆದಾಗ $n^2, n^3\to\infty$ ಆದ್ದರಿಂದ, $f(n)=\frac{\infty}{\infty}$, ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪ.

ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅಂಶದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತವಾದ n^2 ನಿಂದ ಮತ್ತು ಛೇದದಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತ n^3 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\left(3-4/n+5/n^2\right)}{n\left(4-1/n^2+7/n^3\right)}\right]$$

ಆಗ $n\to\infty$ ಆದಾಗ $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}\to 0$ ಆದ್ದರಿಂದ ಮಿತಿ = 0.

11. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$f(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ $x \to \infty$ ಆದಾಗ, $x^2 \to \infty$ ಆಗುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವು $(\infty - \infty)$ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$$\lim_{x \to \infty}\left[\sqrt{x^2+1} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \times \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\frac{\left(x^2+1\right) - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}\right] = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\frac{1}{x\sqrt{1+(1/x^2)} + 1}\right]$$

$x \to \infty$ ಆದಾಗ $\frac{1}{x} \to 0$ ಮತ್ತು $\frac{1}{x^2} \to 0$ $\quad \therefore$ ಮಿತಿ $= 0$

12. $$\lim_{n \to \infty}\left[\frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2}{2n(n+1)(n+2)}\right]$$

ನಮಗೆ $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty}\left[\frac{1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2}{2n(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6.2n(n+1)(n+2)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\{(1+1/n)\}\{n(2+1/n)\}}{6.2n\{(1+1/n)\}\{n(1+2/n)\}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+1/n)(2+1/n)}{12(1+1/n)(1+2/n)}\right] = \frac{(1)(2)}{(12)} = \frac{1}{6}.$$

13. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+........ n \text{ ಪ 'ದಗಳವರೆಗೆ}\right]$

ಈಗ $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+.......= 3\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}........\right].$

ಕಂಸಗಳಲ್ಲಿರುವ ಶ್ರೇಢಿಯು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ (GP) ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಿದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದ $\frac{1}{2}$, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ = $\frac{1}{2}$

ಅಂದರೆ $a=\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $r=\frac{1}{2}$ ಹಾಗೂ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊತ್ತ

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{1}{2}^n\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+.....\right] = \lim_{n\to\infty} 3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

ಇಲ್ಲಿ $n\to\infty$ ಆದಾಗ $2^n\to\infty$ ಹಾಗೂ $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \to 0$

$$\therefore \quad ಮಿತಿ = 3\lim_{x\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) = 3(1)=3.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-1}{x+1}\right]$

2. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{2x^2+4x-1}{x^2-2x+1}\right]$

3. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-16}{x^4-256}\right]$

4. $\lim_{x\to -2}\left[\frac{x^3+8}{x+2}\right]$

5. $\lim_{x\to -1}\left[\frac{3x^3+4x+1}{4x^2+3x-1}\right]$

6. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{2x^2-7x+6}{3x^2-7x+2}\right]$

7. $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\left[\frac{2x^2+5x-3}{6x^2+7x-5}\right]$

8. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{(2x-3)}{x^2+3}\right]^2$

9. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{4x^3-3x^2+x}{3x^2+2x}\right]$

10. $\lim_{x\to -1}\left[\frac{3x^2+4x+1}{4x^2+3x-1}\right]$

11. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}\right]$

12. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right]$

13. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{6}{x^2+x-2}\right]$

14. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^3-1}\right]$

15. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\right]$

16. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}}{x^2-1}\right]$

17. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x+1}}{x-2}\right]$

18. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}\right]$

19. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right]$

20. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x}-1}\right]$

21. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\right]$

22. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}\right]$

23. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right]$

24. $\lim_{x\to 5}\left[\frac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}\right]$

25. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5x-1}}{x^2-4}\right]$

26. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right]$

27. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}\right]$

28. $\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{12-x}-\sqrt{x+4}}{(x-4)}\right]$

29. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right]$

30. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)\right]$

31. $\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]$

32. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+5}x-x\right]$

33. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+6x+15}-\sqrt{x^2+15}\right]$

34. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+3}-x}\right]$

35. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{5x^2-6x+8}-\sqrt{3x^2+2x-5}}{(2x+5)}\right]$

36. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2-4x+7}{5x^2+2x-7}\right]$

37. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n^2-2n-10}{2n^2+5n-1}\right]$

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{4n^2-5n+7}{2n-3}\right]$

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(3n+4)(4n+3)}{(5n-6)(6n+5)}\right]$

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(3n-2)^2(5n+4)^2}{(3n+1)^5}\right]$

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+2+3....+n}{n^2+3}\right]$

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+2+3....+n}{2n^2+3n}\right]$

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^3+2^3+....+n^3}{(n+1)^4}\right]$

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^3+2^3+....+n^3}{n^2(1+2+....+n)}\right]$

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2+2^2+....+n^2}{1^3+2^3+..n^3}\right]$

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+.....\dfrac{1}{5^n}\right]$

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+.....n \text{ terms}\right]$

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2+2^2+....n^2}{(2n^3+n^2+n-3)}\right]$

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{14n^3-13n^2-4n+16}{36n^3+15n^2+5n-1}\right]$

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+......n \text{ terms}\right]$

11.5 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಮಿತಿಗಳು :

ಪ್ರಮೇಯ 1 :

n ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{x^n - a^n}{x - a}\right] = na^{n-1}.$$

ಸಾಧನೆ : n ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದುದರಿಂದ ನಾವು n ನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಹಾಗೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ಹೀಗೆ ಮೂರು ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಕಾರದಲ್ಲೂ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರಕಾರ (i) : n ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$\left(x^n - a^n\right)$ನ್ನು $(x-a)$ ಯಿಂದ ನಾವು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + ... + a^{n-1}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ದೊರಕುತ್ತದೆ.

$$x-a)\, x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + ... - a^n \; (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + ... + a^{n-1}$$

$$\underline{x^n - ax^{n-1}}$$

$$a\,x^{n-1} + 0.x^{n-2}$$

$$\underline{a\,x^{n-1} - a^2 .x^{n-2}}$$

$$a^2 .x^{n-2} +$$

.....

.....

.....

$$-a^n$$

$$-a^n$$

$$0$$

$$\text{ಅಂದರೆ } \left[\frac{x^n - a^n}{x-a}\right] = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + ... + a^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{x \to a}\left[\frac{x^n - a^n}{x-a}\right] = \underline{\lim_{x \to a}}\left[x^{n-1} + a.x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + ... + a^{n-1}\right]$$

$$= \left[a^{n-1} + a.a^{n-2} + a^2 .a^{n-3} + ... + a^{n-1}\right]$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + ...n \text{ ಪದಗಳು.}$$

$$= na^{n-1}$$

ಪ್ರಕಾರ (ii) : n ಋಣಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ $n = -m$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ m ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ

ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

$$\therefore \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[\frac{x^{-m}-a^{-m}}{x-a}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{\frac{1}{x^m}-\frac{1}{a^m}}{x-a}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{(a^m-x^m)}{a^m x^m (x-a)}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{-(x^m-a^m)}{a^m x^m (x-a)}\right]$$

$$=(-)\lim_{x\to a}\frac{1}{a^m x^m}\cdot\lim_{x\to a}\left[\frac{x^m-a^m}{x-a}\right]$$

$$=(-)\frac{1}{a^m\cdot a^m}\cdot m a^{m-1}$$

[$m =$ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರಕಾರ (i) ನ್ನು ಬಳಸಿ].

$$=-m\cdot a^{-m-1}$$

ಆದರೆ $-m=n$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to a}\left[\frac{x^n-a^n}{x-a}\right]=na^{n-1}$$

ಪ್ರಕಾರ (iii) : n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿರಲಿ (ಧನಾತ್ಮಕ ಅಥವಾ ಋಣಾತ್ಮಕ)

ಅಂದರೆ $\therefore = \frac{p}{q}$, p ಮತ್ತು q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ $q \neq 0$.

$$\therefore \qquad \lim_{x\to a}\left[\frac{x^n-a^n}{x-a}\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{x^{p/q}-a^{p/q}}{x-a}\right]$$

ಇಲ್ಲಿ $x = y^q$ ಮತ್ತು $a = b^q$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

$x \to a$ ಆದಾಗ $y^q = a$ ಆಗುವುದು

$\therefore \quad y = a^{1/q} = \left(b^q\right)^{1/q} = b \qquad [\because \quad a = b^q]$

ಅಂದರೆ $y \to b$ ಆಗುವುದು.

ಹೀಗೆ, $x \to a \Leftrightarrow y \to b$.

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{x^n - a^n}{x - a}\right] = \lim_{y \to b}\left[\frac{\left(y^q\right)^{p/q} - \left(b^q\right)^{p/q}}{y^q - b^q}\right]$$

$$= \lim_{y \to b}\left[\frac{y^p - b^p}{y^q - b^q}\right]$$

$$= \frac{\lim_{y \to b}\left[\frac{y^p - b^p}{y - b}\right]}{\lim_{y \to b}\left[\frac{y^q - b^q}{y - b}\right]}$$

$$= \frac{p.b^{p-1}}{q.b^{q-1}}$$

[p ಮತ್ತು q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಕಾರ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ]

$$= \left(\frac{p}{q}\right) b^{p-1-q+1} \qquad = \left(\frac{p}{q}\right) b^{p-q}$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right) b^{q\left(\frac{p}{q} - 1\right)}$$

ಆದರೆ $\frac{p}{q} = n$ ಮತ್ತು $b^q = a$

$$\therefore \quad \lim_{x \to a}\left[\frac{x^n - a^n}{x - a}\right] = n.a^{n-1}$$

ಆದ್ದರಿಂದ n ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{x^n - a^n}{x - a}\right] = na^{n-1}$$

ಪ್ರಮೇಯ 2 :

θ ಕೋನವು ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿದ್ದಾಗ $\lim_{\theta \to 0}\left[\frac{\sin\theta}{\theta}\right] = 1$

ಸಾಧನೆ :

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $\theta = 0$ ಎಂದು ಹಾಕಿದಾಗ $\frac{0}{0}$ ಎಂಬ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಾವು ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

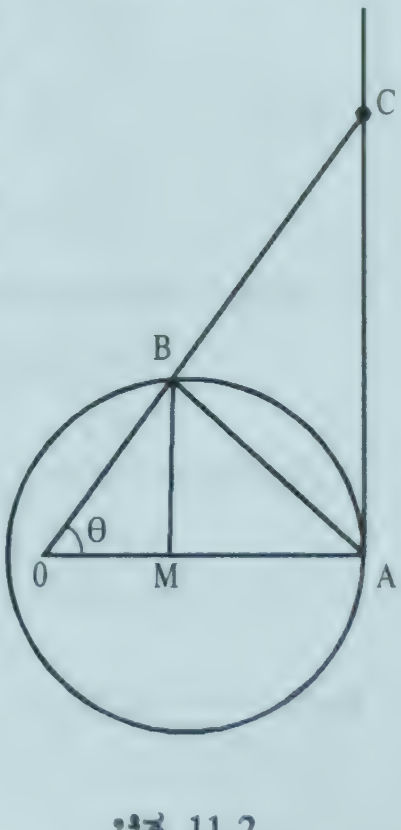
O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ r ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ $\widehat{AB} = r$ ಅಳತೆ ಇರುವ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು OA ಮತ್ತು OB ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 11.2). $\angle BOA$ ಕೋನವು θ ರೇಡಿಯನ್ ಆಗಿರಲಿ. A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆದು, OB ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ ಅದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು C ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. AB ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. B ಬಿಂದುವಿನಿಂದ OA ಗೆ BM ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $\therefore \; OA = OB = r$

ಚಿತ್ರದಿಂದ ನಮಗೆ BOA ಹಾಗೂ AOC ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು BOA ವೃತ್ತಖಂಡವು ಕಾಣಸಿಗುವುವು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ

$\therefore$ ತ್ರಿಭುಜ BOAಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ < ವೃತ್ತಖಂಡ BOAಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

< ತ್ರಿಭುಜ AOCಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

.... (1)



ಚಿತ್ರ 11.2

ಈಗ BOA ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\sin\theta = \frac{BM}{OB} = \frac{BM}{R}$

$\therefore \quad BM = r\sin\theta$

Δ^{le} BOAಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times OA \times BM$

$= \frac{1}{2} \times r \times r\sin\theta$

$= \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$ ...(2)

ವೃತ್ತಖಂಡ BOAಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \frac{1}{2} r^2 \theta$ ...(3)

OAC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\tan\theta = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{r}$

$\therefore \quad AC = r\tan\theta$

Δ^{le} OACಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times OA \times AC$

$= \frac{1}{2} \times r \times r\tan\theta = \frac{1}{2} r^2 \tan\theta$ ...(4)

ಸಮೀಕರಣ (2), (3) ಮತ್ತು (4) ಇವುಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿಗಾಗ,

$\frac{1}{2} r^2 \sin\theta < \frac{1}{2} r^2 \theta < \frac{1}{2} r^2 \tan\theta$

ಅಥವಾ $\frac{r^2}{2}$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$\sin\theta < \theta < \tan\theta$ ಬರುವುದು.

$\sin\theta (> 0)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ

$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

ಅಥವಾ $1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇದಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$ (***ಸೂಚನೆ :*** $a < b$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ಆಗುವುದು)

ಎಂದು ಬರುವುದು. ಮಿತಿಗಳನ್ನು $(\theta \to 0)$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$1 \geq \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \geq \lim_{\theta\to 0} \cos\theta$$

(ಸೂಚನೆ : $f(x) > g(x)$ ಆಗಿದ್ದರೆ $\lim f(x) \geq \lim g(x)$ ಆಗುವುದು.)

$$\therefore \quad 1 \geq \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \geq 1 \quad \left(\because \quad \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = \cos 0 = 1 \right)$$

$$\therefore \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$ (θ ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿದ್ದಾಗ)

ಪ್ರಮೇಯ 3 :

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$ (θ ರೇಡಿಯನ್ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ)

$$\text{LHS} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} \qquad = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta/\cos\theta}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta.\cos\theta} \qquad = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1 \times 1 = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$

ಹಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಮಿತಿಗಳು :

1. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

ಫಲಿತಾಂಶ (1)ರಲ್ಲಿ $\frac{1}{n}=x$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $n=\frac{1}{x}$ ಆಗುವುದು $n\to\infty$ ಆದಾಗ $x\to 0$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

ಅಂದರೆ $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

3. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\log_e(1+x)}{x}\right]=1$

$$\text{LHS}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_e(1+x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\log_e(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log_e\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] \quad [\because \lim\log f(x)=\log\lim f(x)]$$

$=\log_e e=1$ [(2)ರಿಂದ]

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\log_e(1+x)}{x}\right]=1$$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x}=1$

$e^x - 1 = y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $e^x = 1 + y$

$\therefore \quad x = \log_e(1+y)$ ಎಂದಾಗುವುದು.

$x = 0$ ಆದಾಗ $y = e^x - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ಅಂದರೆ $y = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ $x \to 0$ ಆದಾಗ $y \to 0$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \text{ LHS} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_e(1+y)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{y}\log_e(1+y)\right)}$$

$$\frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\log_e(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$ [(3) ರಿಂದ]

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

5. $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$$

$a^x - 1 = y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $a^x = 1 + y$

$\therefore x = \log_a(1+y)$ ಎಂದು ಆಗುವುದು.

$x = 0$ ಆದಾಗ $y = a^x - 1 = a^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ಅಂದರೆ $y = 0$.

ಆದ್ದರಿಂದ $x \to 0$ ಆದಾಗ $y \to 0$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{a^x - 1}{x}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{y}{\log_a(1+y)}\right]$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y}}$$

ಆಧಾರ a ಯನ್ನು ಆಧಾರ e ಗೆ ಬದಲಿಸಿದಾಗ

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log_e(1+y)}{(\log_e a)\,y}}$$

$$=\frac{\log_e a}{\lim\limits_{y\to 0}\left\{\dfrac{\log_e(1+y)}{y}\right\}} \qquad =\frac{\log_e a}{1}=\log_e a$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^5-243}{x-3}\right]$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^5-3^5}{x-3}\right]=5(3)^{5-1}=5\left(3^4\right)=405$$

2. $$\lim_{x\to -3}\left[\frac{x^5+243}{3x+9}\right]$$

$$=\lim_{x\to -3}\left[\frac{x^5-(-243)}{3\left(x-(-3)\right)}\right] \qquad =\frac{1}{3}\lim_{x\to -3}\left[\frac{x^5-(-3)^5}{x-(-3)}\right]$$

$$=\frac{1}{3}5(-3)^4=\frac{1}{3}\times 5\times 81=135$$

3. $$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^7-128}{x^9-512}\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^7-2^7}{x^9-2^9}\right] \qquad =\lim_{x\to 2}\left[\frac{\left(x^7-2^7\right)/(x-2)}{\left(x^9-2^9\right)/(x-2)}\right]$$

$$=\frac{7.(2)^{7-1}}{9.(2)^{9-1}}=\frac{7}{9}\left(\frac{2^6}{2^8}\right)=\frac{7}{9}\left(\frac{1}{2^2}\right)=\frac{7}{36}$$

4. $$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\left[\frac{x\sqrt{x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{3x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{3}}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right] \qquad =\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{1}{3}}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{x-\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}-1} \qquad =\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

5. $$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{x^5}-\sqrt{32}}{x^{3/8}-8^{1/8}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{x^5}-\sqrt{32}}{x^{3/8}-2^{3/8}}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\left(x^{5/2}-2^{5/2}\right)/(x-2)}{\left(x^{3/8}-2^{3/8}\right)/(x-2)}\right]$$

$$= \frac{\frac{5}{2}(2)^{5/2-1}}{\frac{3}{8}(2)^{3/8-1}} \qquad =\frac{5}{2}\times\frac{8}{3}\quad\frac{2^{3/2}}{2^{-5/8}}$$

$$= \frac{20}{3}\ 2^{17/8}=\frac{5}{3}(2)^{33/8}$$

6. $$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{8n+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}\right]= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2} = e^{3}1^{2} = e^{3}$$

7. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{3x}{4}}$$

$\frac{3}{2x}=y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ $\therefore \quad x=\frac{3}{2y}$

$x\to\infty$ ಆದಾಗ $y\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{3x}{4}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{3}{4}\times\frac{3}{2y}}$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{9/8} = e^{9/8} \because \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e$$

8. $$\lim_{x\to\infty}[1-5/3x]^{4x/5}$$

$\frac{-5}{3x}=y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore \quad x=\frac{-5}{3y}$

$x\to\infty$ ಆದಾಗ $y\to 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left[1-\frac{5}{3x}\right]^{4x/5} = \lim_{y\to 0}[1+y]^{\frac{4}{5}\times\left(\frac{-5}{3y}\right)}$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{1/y}\right]^{\frac{-4}{3}} = e^{-4/3} = \frac{1}{e^{4/3}}$$

9. $\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^{3y}-1}{y}\right)$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(e^{3y}-1)^3}{3y}$$

$$= \frac{3}{1}\lim_{y\to 0}\left[\frac{e^{3y}-1}{(3y)}\right] = 3\times 1=3 \left[\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\right]$$

10. $\lim_{t\to 0}\left[\frac{e^{7t}-1}{5t}\right]$

$$= \frac{1}{5}\lim_{t\to 0}\left[\frac{e^{7t}-1}{5t}\right] = \frac{1}{5}\lim_{t\to 0}\left[\frac{\left(e^{7t}-1\right)7}{7t}\right]$$

$$= \frac{7}{5}\lim_{t\to 0}\left[\frac{e^{7t}-1}{7t}\right] = \frac{7}{5}\times 1=\frac{7}{5}$$

11. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{5x}-e^{2x}}{4x}\right]$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{5x}-e^{2x}}{x}\right] = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[e^{2x}\frac{(e^{3x}-1)}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}e^{2x}.\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)\times 3}{x\times 3}$$

$$= \frac{3}{4}\times 1\times 1 =\frac{3}{4}$$

12. $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2^x-1}{3x}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{2^x-1}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\log_e 2\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a\right]$$

13. $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{a^x-b^x}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{b^x\left(a^x/b^x-1\right)}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} b^x \lim_{x\to 0}\left[\frac{(a/b)^x-1}{x}\right] = b^0\log_e(a/b) = \log_e(a/b)$$

14. $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{12^x-4^x-3^x+1}{2x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{12^x-4^x-3^x+1}{x^2}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{4^x(3^x-1)-1(3^x-1)}{x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{(3^x-1)(4^x-1)}{x^2}\right] = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{(3^x-1)}{x}\frac{(4^x-1)}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{x}\right).\lim_{x\to 0}\left(\frac{4^x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log_e 3\log_e 4$$

15. $$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan m\theta}{\sin n\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{\frac{\tan m\theta}{m\theta}m\theta}{\frac{\sin n\theta}{n\theta}m\theta}\right] \qquad = \frac{m}{n}\frac{\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\tan m\theta}{m\theta}\right)}{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin n\theta}{(n\theta)}}$$

$$= \frac{m}{n}\times\frac{1}{1}=\frac{m}{n}$$

16. $$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1-\cos 2\theta}{\theta}\right]$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{2\sin^2\theta}{\theta}\right] \quad \left[\because 1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta\right]$$

$$= 2\lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}(\sin\theta)\right\} \qquad = 2\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\lim_{\theta\to 0}\sin\theta$$

$$2\times 1\times\sin 0 = 2\times 0 = 0$$

17. $$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1-\cos m\theta}{1-\cos n\theta}\right]$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{2\sin^2 m\theta/2}{2\sin^2 n\theta/2} \right] \quad = \lim_{\theta \to 0} \frac{\left[\frac{\sin(m\theta/2)}{(m\theta/2)} \times \frac{m\theta}{2} \right]^2}{\left[\frac{\sin(n\theta/2)}{(n\theta/2)} \times \frac{n\theta}{2} \right]^2}$$

$$= \frac{m^2}{n^2} \frac{\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin(m\theta/2)}{m\theta/2} \right)^2}{\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin(n\theta/2)}{n\theta/2} \right)^2} \quad = \frac{m^2}{n^2} \times 1 = \frac{m^2}{n^2}$$

18. $$\lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{\sqrt{2\sin^2 x/2}} \right] \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{\sin x/2} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{\frac{(\sin x/2)}{x}} \right] \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{\frac{\sin x/2}{x/2} \times \frac{x}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\frac{\sin x/2}{x/2}} \right] = \frac{2}{\sqrt{2}} \times 1 = \sqrt{2}$$

19. $$\lim_{x \to a} \left[\frac{\sin x - \sin a}{x - a} \right]$$

ನಮಗೆ $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\left[\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\right] = \lim_{x\to a}\left[2\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{(x-a)}\right]$$

$$=2\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\frac{(x-a)}{2}}{(x-a)}\right]$$

$$=2\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right).\lim_{x\to a}\left[\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)\times 2}\right]$$

$$= \frac{2}{2}\cos\left(\frac{a+a}{2}\right)\times 1 = \cos a$$

20. $$\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\cos x}{(\pi/2-x)}\right]$$

$\pi/2-x=y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ $\therefore \quad x=\pi/2-y$

$x\to\pi/2$ ಆದಾಗ $y\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\cos x}{\pi/2-x}\right]=\lim_{y\to 0}\left[\frac{\cos(\pi/2-y)}{y}\right]$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{\sin y}{y}\right]=1$$

21. $$\lim_{\theta\to\pi/2}\left[\frac{\sec\theta-\tan\theta}{\pi/2-\theta}\right]$$

$\pi/2-\theta=y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ $\therefore \theta=\pi/2-y$

$\theta\to\pi/2$ ಆದಾಗ $y\to 0$

$$\therefore \lim_{\theta \to \pi/2}\left[\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\pi/2 - \theta}\right]$$

$$= \lim_{y \to 0}\left[\frac{\sec(\pi/2 - y) - \tan(\pi/2 - y)}{y}\right]$$

$$= \lim_{y \to 0}\left[\frac{\cos ecy - \cot y}{y}\right] = \lim_{y \to 0}\left[\frac{\frac{1}{\sin y} - \frac{\cos y}{\sin y}}{y}\right]$$

$$= \lim_{y \to 0}\left[\frac{(1 - \cos y)}{y \sin y}\right] = \lim_{y \to 0}\left[\frac{2\sin^2 y/2}{y(2\sin y/2 \cos y/2}\right]$$

$$= \lim_{y \to 0}\left[\frac{\tan y/2}{y}\right]$$

$$= \lim_{y \to 0}\left[\frac{\tan y/2}{y/2 \times 2}\right] = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

22. $\lim_{3x \to 1}\left[\frac{\sin 3\pi x}{3x - 1}\right]$

$3x - 1 = y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ $\quad \therefore \quad x = \frac{y+1}{3}$

$3x \to 1$ಆದಾಗ $y \to 0$ ಆಗುವುದು.

$\therefore$

$$\therefore \text{ ಮಿತಿ } = \lim_{3x \to 1}\left[\frac{\sin 3\pi x}{3x - 1}\right] = \lim_{y \to 0}\left[\frac{\sin 3\pi\left(\frac{y+1}{3}\right)}{y}\right]$$

$$= \lim_{y \to 0}\left[\frac{\sin(\pi + \pi y)}{y}\right] = -\lim_{y \to 0}\left[\frac{\sin \pi y}{y}\right]$$

$[\because \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta]$

$$= -\lim_{y\to 0}\left[\frac{\sin \pi y}{\pi y}\times\pi\right] = -\pi\times 1 = -\pi$$

23. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{(\sin^{-1}x)^2}\right]$

$\sin^{-1}x = y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ $\therefore x=\sin y$

$x\to 0$ ಆದಾಗ $y\to 0$ ಆಗುವುದು.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{(\sin^{-1}x)^2}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 y}}{y^2}\right]$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{1-\cos y}{y^2}\right]$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{2\sin^2 y/2}{y^2}\right] = 2\lim_{y\to 0}\left[\frac{\sin y/2}{y}\,\frac{\sin y/2}{y}\right]$$

$$= 2\lim_{y\to 0}\left[\frac{\sin y/2}{y/2\times 2}\right]^2 = 2\times\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{2}$$

24. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{e^{3x}-e^x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{e^{3x}-e^x}{x}}\right] = \frac{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]}{\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x(e^{2x}-1)}{x}\right]}$$

$$=\frac{1}{\lim_{x\to 0}e^x \lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)}{x}\times\frac{2}{2}} = \frac{1}{e^0\, 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}=\frac{1}{2}$$

25. $$\lim_{x\to a}\left[\frac{\cos x-\cos a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right]$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{(\cos x-\cos a)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}\times\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{\cos x-\cos a}{x-a}\right].\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{(x-a)}\right].\ \lim_{x\to a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$$

$$= -2\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right).\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{(x-a)}\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$$

$$= -2\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{(x-a)\times 2}{2}}\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{a+a}{2}\right)\times 1\times\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{a}\right)$$

$$= -2\sin a\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{a} \ = \ -2\sqrt{a}\sin a$$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^4-16}{x-2}\right]$ 2. $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^3-27}{x^2-9}\right]$ 3. $\lim_{x\to 4}\left[\frac{1/x^3-1/64}{x^2-16}\right]$

4. $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^5-243}{2x^3-54}\right]$ 5. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{16}}{x-2}\right]$ 6. $\lim_{x\to a}\left[\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right]$

7. $\lim_{x\to -4}\left[\frac{x^5+1024}{x+4}\right]$ 8. $\lim_{x\to 1/2}\left[\frac{8x^2-2}{8x^3-1}\right]$ 9. $\lim_{2x\to 1}\left[\frac{16x^3-2}{16x^4-1}\right]$

10. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^5-32}{x^3-8}\right]$ 11. $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x-3}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}\right]$ 12. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^n-1}{x^m-1}\right]$

13. $\lim_{x\to a}\left[\frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}\right]$ 14. $\lim_{x\to -2}\left[\frac{x^5+32}{x+2}\right]$ 15. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-4}{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}\right]$

16. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right]$ 17. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right]$ 18. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\tan x}{1-\cos x}\right]$

19. $\lim_{x\to 0}[\cos x-\cot x]$ 20. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}\right]$

21. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^2}\right]$ 22. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}\right]$

23. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x-\sec x}{x^3}\right]$ 24. $\lim_{x\to a}\left[\frac{a\sin x-\sin 2x}{x-a}\right]$

25. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}\right]$ 26. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\right]$

27. $\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{\cos 2\theta-\cos 3\theta}{\theta^2}\right]$ 28. $\lim_{x\to \pi/2}[\sec x-\tan x]$

29. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{((\pi/2)-x)}$

30. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1-x}{\cos(\pi x/2)}\right]$

31. $\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{1-\sin\theta}{(\pi/2-\theta)^2}\right]$

32. $\lim_{\theta\to\pi/2}\left[\frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{(\pi/2-\theta)^3}\right]$

33. $\lim_{x\to\pi/4}\left[\frac{1-\tan x}{\pi/4-x}\right]$

34. $\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\cos x}{2x-\pi}\right]$

35. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$

36. $\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{2n+3}$

37. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}\right]^{3n}$

38. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\right]^{3n}$

39. $\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{3x}{2}\right]^{4/5x}$

40. $\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{2}{3x}\right]^{4x/3}$

41. $\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{2x}{5}\right]^{3/5x}$

42. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{5x}-1}{x}\right]$

43. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{7x}-e^{3x}}{6x}\right]$

44. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{5/2x}-e^{1/2x}}{x}\right]$

45. $\lim_{n\to 0}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{3n-2}$

11.6 ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ

11.6.1 ತೆರೆದ ಅಂತರ ಮತ್ತು ಮುಚ್ಚಿದ ಅಂತರ

ಎರಡು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ a ಮತ್ತು b ಪರಿಗಣಿಸಿ $(b>a)$ ಆಗಿರಲಿ,

(i) (a,b) ಯನ್ನು ತೆರೆದ ಅಂತರ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $x\in[a,b]$ ಆದಾಗ $a<x<b$ ಆಗಿರುವುದು.

(ii) $[a,b]$ ಯನ್ನು ಮುಚ್ಚಿದ ಅಂತರ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $x\in(a,b)$ ಆದಾಗ $a\le x\le b$ ಆಗಿರುವುದು.

11.6.2 ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿ

$y = f(x)$ ಎನ್ನುವ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ x

ಎಂಬುದು ನೈಜ ಚರವಾಗಿರಲಿ. $x = a$ ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಒಂದು ತೆರೆದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ $f(x)$ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ನಾವು $x = a$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕಾದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಷರತ್ತುಗಳು ಪೂರೈಕೆಯಾಗಬೇಕು :

1) x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರಬೇಕು ;

2) $f(x)$ ನ ಬೆಲೆ $x = a$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ $f(a)$ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರಬೇಕು ; ಮತ್ತು

3) $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯು $x = a$ ನಲ್ಲಿ $f(a)$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಮೇಲಿನ ಷರತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ, ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಷರತ್ತು ಪೂರೈಕೆಯಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = a$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

x ಚರವು a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವಾಗ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಪಥ (ದಾರಿ)ಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಾಯನ ನಾವು ಎಡಮಿತಿ (LHL) ಮತ್ತು ಬಲಮಿತಿ (RHL) ಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $\lim_{x \to a} f(x)$ ಅನ್ನು ಒಂದೇ ಬಾರಿಗೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲಾಗದಿದ್ದಲ್ಲಿ ಆಗ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು LHL = RHL ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು.

ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಿತಿಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡೂ ಸಹ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು : ಎಷ್ಟೇ ಸಣ್ಣದಾದ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ε ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $0 < |x - a| < \delta$ (δ ಸಹ ಅತಿ ಸಣ್ಣದಾದ ಧನಸಂಖ್ಯೆ) ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ಆಗುವಂತೆ δ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ಇದರ ಸಾರಾಂಶ, ದತ್ತ ಬಿಂದು a ಗೆ ಸಮೀಪದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಗಳಾದ $f(x)$ ಗಳು a ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ಸ್ಥಿರಬೆಲೆಯಾದ $f(a)$ ಗೆ ಸಮೀಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 6, & x = 4 \end{cases}$

ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯದ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು $x = 4$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ.

(ಮೇಲಿನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಉತ್ಪನ್ನಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಚರಸಂಖ್ಯೆ $x \to 4$ ಆದಂತೆ $f(x)$ ನ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಇದು $f(4)$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆಯೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸದರೆ ಸಾಕು).

ಈಗ, $x = 4$ ಆದಾಗ $f(x) = 6$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಅಂದರೆ $f(4) = 6$ ಎಂದಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ $f(x)$, $x = 4$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಸ್ತಿತ್ವವಿದೆ (ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ) ಎಂತಾಯಿತು. ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ :

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4^2}{x-4}$$

$$= 2(4)^{2-1}\, 2\times 4 = 8$$

ಅಂದರೆ $\lim_{x\to 4} f(x) = 8 \neq f(4)$.

ಆದ್ದರಿಂದ $x=4$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವಾಗಿದೆ.

2. ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

$x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವೇ ಅಥವಾ ವಿಚ್ಛಿನ್ನವೇ ಎಂದು ಚರ್ಚಿಸಿ.

ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ $f(x)$ ನ ಬೆಲೆ $x=0$ ಬಿಂದುನಲ್ಲಿ 2 ಎಂದಿದೆ. ಅಂದರೆ $f(0) = 2$ ಎಂದಾಯಿತು.

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಈಗ, ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)\ 1 \neq f(0)$$

ಅಂದರೆ, $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

3. $$f(x)=\begin{cases} x+1, x<0 \\ x, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1\le x\le 2 \end{cases}$$

ಎಂಬುದು $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಮತ್ತು $x = 1$ ನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(i) ಮೊದಲಿಗೆ $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಬೆಲೆ ಅಸ್ತಿತ್ವವಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು.

ದತ್ತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ $f(x)=x, 0\le x\le 1;$ $\therefore f(0)=0$.

ಅಂದರೆ $f(x)$ ನ ಬೆಲೆ $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 0 (ಶೂನ್ಯ) ಎಂದಾಯಿತು.

ಎಡಮಿತಿ $LHL=\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಎಡಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ಚರಸಂಖ್ಯೆ x ನ್ನು ಬೆಲೆ 0 ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವುದರಿಂದ ($x < 0$) $f(x)$ ನ್ನು $x + 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

$$\therefore \quad \text{LHL} = \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(x+1)=0+1=1$$

ಮತ್ತು $\text{RHL} = \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} x=0 \qquad (\because x>0)$

ಅಂದರೆ LHL $\neq$ RHL. ಆದ್ದರಿಂದ $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, $f(x)$ ಒಂದು ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ

(i) $x = 1$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$. ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $f(1) = 1= x$. $x = 1$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ನ ಬೆಲೆ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $$LHL=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x=1$$

ಮತ್ತು $$RHL=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(2-x)=2-1=1$$

ಅಂದರೆ, $\text{LHL}=\text{RHL}=f(1)$.

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 1$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದಾಯಿತು.

4. $$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{1/x}, & x\neq 0\\ e & , x=0\end{cases}$$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ.

ದತ್ತ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)=e$ ಎಂದು ಅರ್ಥೈಸಿದೆ. ಅಂದರೆ, $f(0)=e$ ಆದ್ದರಿಂದ $x=0$ ನಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟ ಪಡಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಆದರೆ, $\therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \quad (x\neq 0)$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

ಅಂದರೆ $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ.

5. $f(x)=\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$, $x\neq 0$ ಮತ್ತು $f(0)=5/2$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯದ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಅಥವಾ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}, & x\neq 0\\ 5/2 & , x=0\end{cases}$$

$x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅಸ್ತಿತ್ವವಿದೆ ಎಂದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $f(0)=5/2$.

ಈಗ, $\lim_{x\to 0} f(x)= \lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}\right], \quad x\neq 0$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-2\sin\frac{2x+3x}{2}\sin\frac{2x-3x}{2}}{x^2}\right]$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x/2)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\quad x/2)}{x}$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x/2)}{(5x/2)\times(2/5)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x/2)}{(-x/2)\times(-2)}$$

$$= -2\times\frac{5}{2}\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{5}{2} = f(0).$$

ಅಂದರೆ, $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

6. $|x|$ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವು $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವನ್ನು $f(x)=|x|$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ನಮಗೆ

$$\left.\begin{array}{ll}|x|=x & , \; x>0 \\ |x|=-x & , \; x<0 \\ |x|=0 & , \; x=0\end{array}\right\} \text{ ಅಂದರೆ, } \qquad f(x)=\begin{cases}x & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ -x & , \quad x<0\end{cases}$$

ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ.

ಈಗ ಎಡಮಿತಿ LHL = $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(-x)=0$

ಮತ್ತು RHL = $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(x)=0$

ಹಾಗೂ $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಬೆಲೆಯು 0 ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $f(0)=0$.

$\therefore$ LHL = RHL = $f(0)=0$.

ಅಂದರೆ $f(x)=|x|$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = 0$ ವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

[***ಗಮನಿಸಿ :*** $|x|$ ನ್ನು "ಮಾಡ್x" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು "ಅನೃಣ ಮೌಲ್ಯದ ಉತ್ಪನ್ನ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.]

7. $$f(x)\begin{cases} \dfrac{x+5}{x}, & -3 \le x \le 1 \\ \dfrac{6}{2-x}, & -2x, -1 \le 1 \\ \dfrac{5x+3}{x+1}, & 1,< x \le 3 \end{cases}$$

$f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವು $x = -1$ ರಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು (-3,3) ಅಂತರದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಅಂತರವನ್ನು ಮೂರು ಉಪಾಂತರಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಈಗ $x = -1$ ರಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬೇಕು. $x = -1$ ಬಿಂದುವು ಮೊದಲನೇ ಉಪಾಂತರವಾದ $-3 \le x \le -1$ ರಲ್ಲಿ ಇರುವುದರಿಂದ

$f(x) = \dfrac{x+5}{x}$ ನಿರೂಪದಲ್ಲಿ $x = -1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$f(-1) = \dfrac{-1+5}{-1} = -4$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

LHL $= \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1}\left(\dfrac{x+5}{x}\right) = \dfrac{-1+5}{-1} = -4$ ಈಗ, ಮತ್ತು

RHL $= \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1}\left[\dfrac{6}{2-x} - 2x\right]$ $(\because -2 < x \le 1)$

$$= \frac{6}{2-(-1)} - 2(-1) = \frac{6}{3} + 2 = 2 + 2 = 4.$$

$\therefore$ LHL $\ne$ RHL

ಅಂದರೆ, $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $x = -1$ ರಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

8. $$f(x)\begin{cases} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x-1}, & x \ne 1 \\ K, & x = 1 \end{cases}$$

ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ $x = 1$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ K ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

ದತ್ತ ಬಿಂದು $x=1$ ರಲ್ಲಿ $f(x)=K$, ಅಂದರೆ $f(1)=K$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

ಉತ್ಪನ್ನವು $f(x)$ ಬಿಂದು $x=1$ ರಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\lim_{x\to 1} f(x)=K$$

ಅಂದರೆ, $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}=K$

ಅಂಶವನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತಿಸಿದಾಗ

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)}=K$$

ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾದ $(x-1)$ ನ್ನು $x\neq 1$ ಆದಾಗ ರದ್ದು ಮಾಡಿ

$$K=\lim_{x\to 1}(3x+2)=3(1)+2=3+2$$

ಅಂದರೆ $K=5$.

9. $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}, x\neq 0$ ಮತ್ತು $f(0)=K$ ಆಗಿದ್ದು $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ K ನ ಬೆಲೆ ಏನು ?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x} & , \quad x\neq 0\\ K & , \quad x=0\end{cases}$$

$f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ಆಗಿರುವುದು $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

ಅಂದರೆ, $\lim_{x\to 0} f(x)=K$

i.e $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 4x)}{(1-\cos 2x)}=K$ ಅಥವಾ $K=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{2\sin^2 x}$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{\sin x}\right]^2$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\times 2x}{\frac{\sin x}{x}\times x}\right]^2 \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{\sin 2x}{2}\times 2x}{\frac{\sin x}{x}\times x}\right]^2$$

$$= \frac{2^2 \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = L$$

$$= 4\times 1 = 4 \qquad \therefore K = 4$$

10. $f(x)=\begin{cases}(1+3x)^{4/x} & , \quad x \neq 0\\ e^{12} & , \quad x=0\end{cases}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವು $x = 0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

ದತ್ತ ಬಿಂದು $x = 0$ ಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಅಸ್ತಿತ್ವ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ $f(0)=e^{12}$ ಎಂದಾಯಿತು.

ಈಗ, $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{4/x}$ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ $3x=y$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ $x=\frac{y}{3}$.

$x=0$ ಆದಾಗ $y=3(0)=0$ ಅಂದರೆ $y\to 0$ ಆಗುವುದು

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{4/x}$$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{4}{(y/3)}}$$

$$= \lim_{y\to 0}\left\{(1+y)^{1/y}\right\}^{12}$$

$$= \quad e^{12} \qquad \left[\because \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e\right]$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=e^{12}$$

ಅಂದರೆ, $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.6

I *ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಅಥವಾ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ಬಗೆಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ :*

1. $x=2$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)=\begin{cases}4x-1 \ , & x\leq 2\\ 2x+3 \ , & x<2\end{cases}$

2. $x=0$ ಮತ್ತು $x=1$ ರಲ್ಲಿ $f(x)=\begin{cases}4x+1 \ , & x\leq 0\\ 1-3x \ , & 0<x\leq 1\\ 2+3x \ , & x>1\end{cases}$

3. $x=1$ ರಲ್ಲಿ $f(x)=\begin{cases}x^2+2 \ , & x>1\\ 2x+1 \ , & x=1\\ 4x-1 \ , & x<1\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^x-b^x}{x} \ , & x\neq 0\\ \log(a/b) \ , & x=0\end{cases}$, $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

5. $x=\dfrac{\pi}{4}$ ರಲ್ಲಿ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\tan x}{\pi/4-x} \ , & x\neq \pi/4\\ 2 \ , & x=\pi/4\end{cases}$

6. $x=0$ ಯಲ್ಲಿ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3} \ , & x\neq 0\\ 1 \ , & x=0\end{cases}$

7. $x=3$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1/x^4)-(1/3^4)}{(1/x)-(1/3)} & , \quad x\neq 3 \\ (4/9) & , \quad x=3 \end{cases}$

8. $x=2$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x-2} & , \quad x\neq 2 \\ 32 & , \quad x=2 \end{cases}$

9. $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 2 & , \quad x=0 \end{cases}$

10. $x=2$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}} & , \quad x\neq 2 \\ 8 & , \quad x=2 \end{cases}$

II *ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯಗಳು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ ವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ* K *ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :*

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x} & , \quad x\neq 0 \\ K & , \quad x=0 \end{cases}$ $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3} & , \quad x\neq 3 \\ K & , \quad x=3 \end{cases}$ $x=3$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan 5x}{\sin x} & , \quad x\neq 0 \\ K & , \quad x=0 \end{cases}$ $x=0$ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

ಅಧ್ಯಾಯ-12
ನಕ್ಷೆಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ

12.1 ಪುನರಾವರ್ತನೆ:

ಬಹುಮುಖಘನ ಮತ್ತು ಜಾಲ (ಬಂಧ)
(Polyhedra and Networking)

ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿತ್ಯ ನಾವು ನೋಡುವ ಘನವಸ್ತುಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕಾರ ಹಾಗೂ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಹಲವು ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ. ಇಂತಹ ಗುಂಪಿಗೆ ಸೇರಿರುವ ಬಹು ಭುಜಗಳಿಂದಾವೃತವಾಗಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬಹುಮುಖ ಘನಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ 'ಜಾಮಿಟ್ರಿ ಬಾಕ್ಸ್', 'ಉಡುಗೊರೆಗಳ ಪೊಟ್ಟಣಗಳು' ಮುಂತಾದುವುಗಳು ದಿನನಿತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಬಹುಮುಖ ಘನಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಬಹಳ ಭುಜಗಳಿಂದುಂಟಾದ (ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿರುವ ಸಮತಲ) ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ನಿಯಮಿತ ಬಹುಭುಜಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಮೂರು ಆಯಾಮವುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಬಹುಭುಜಗಳಿಂದ ಮುಚ್ಚಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಯನ್ನು ಬಹುಮುಖಘನ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಬಹುಮುಖಘನದಲ್ಲಿ, ಮುಖಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು F, ಶೃಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು V ಎಂದೂ ಹಾಗೂ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು E ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಮುಖ ಘನಾಕೃತಿಗಳು $F+V=E+2$ ಎಂಬ ಆಯ್ಲರ್‌ನ (Euler) ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಬಹುಮುಖಘನದ ಎಲ್ಲಾ ಮುಖಗಳು ನಿಯಮಿತ ಬಹು ಭುಜಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು ನಿಯಮಿತ ಬಹುಫಲಕಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿಯಮಿತ ಬಹುಫಲಕಗಳಲ್ಲಿ 5 ವಿಧಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಹೆಸರಿಸಲಾಗಿದೆ :

1. ಚತುರ್ಮುಖ ಘನ 2. ಷಣ್ಮುಖ ಘನ
3. ಅಷ್ಟಮುಖ ಘನ 4. ದ್ವಾದಶಮುಖ ಘನ
5. ವಿಂಶತಿ ಘನ

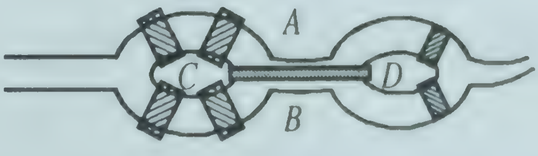
ಆಯ್ಲರನ ಸೂತ್ರವು ಮೇಲಿನ ಬಹುಫಲಕಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

'ನಕ್ಷೆಗಳ (ಗ್ರಾಫ್) ಸಿದ್ಧಾಂತ'ವು ದಿನನಿತ್ಯದ ಹತ್ತು ಹಲವಾರು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಅನುಕೂಲವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬೆಂಗಳೂರಿನ ಹಲವು ಪ್ರಮುಖ ಪ್ರೇಕ್ಷಣೀಯ ಸ್ಥಳಗಳನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಇಲೆಕ್ಟ್ರಾನಿಕ್ಸ್, ನೆಟ್‌ವರ್ಕ್ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮುಂತಾದ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ 'ನಕ್ಷೆಗಳು' ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿವೆ.

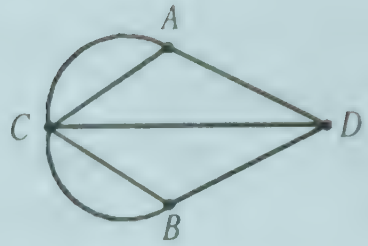
ಮೊಟ್ಟಮೊದಲಿಗೆ ಆಯ್ಲರ್ (Euler, 1707-1783) 'ಕೋನಿಗ್ಸ್ ಬರ್ಗ್' ಪಟ್ಟಣದ ಸೇತುವೆಗಳ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿದ.

ಜರ್ಮನಿಯ ಕೋನಿಗ್ಸ್ ಬರ್ಗ್‌ನಲ್ಲಿ ಎರಡು ದ್ವೀಪಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಪರ್ಕವನ್ನು ಏಳು ಸೇತುವೆಗಳ ಮೂಲಕ ಕಲ್ಪಿಸಲಾಗತ್ತು. ಆಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆ ಏನೆಂದರೆ, ಜನರು ಏಳು ಸೇತುವೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಡಿಗೆಯಲ್ಲಿ ದಾಟಿ, ಎರಡೂ ದ್ವೀಪಗಳನ್ನು ತಲುಪಬೇಕು ಹಾಗು ಯಾವುದೇ ಸೇತುವೆಯನ್ನು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚುಸಲ ಹಾದು ಹೋಗಬಾರದು (ಚಿತ್ರ 12.1). ಆದರೆ ಇದು ಎಷ್ಟು ಸಲ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿಲ್ಲ. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ಆಯ್ಲರ್‌ನ ಗ್ರಾಫ್ ಸಿದ್ಧಾಂತದಿಂದ ಕಂಡು ಬಂದಿತು. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸೀಸದ ಕಡ್ಡಿಯ ತುದಿಯನ್ನು ಕಾಗದದಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾರಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಗಳ (ಕಂಸಗಳ) ಮೇಲೆ ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಹಾದು ಹೋಗಬಾರದು (ಚಿತ್ರ 12.2) ಎನ್ನುವ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಕಂಡುಬಂದಿತು. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ಕಂಡುಬಂದಾಗ 'ಕೋನಿಗ್ಸ್‌ಬರ್ಗ್' ಸಮಸ್ಯೆಯೂ ಸಹ ಕೆಲವು ನಿಬಂಧನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ಕಂಡು ಬಂದಿತು.

ಇದನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾ ಚಿತ್ರವು ಕಂಡು ಬರುವುದು.



ಚಿತ್ರ 12.1



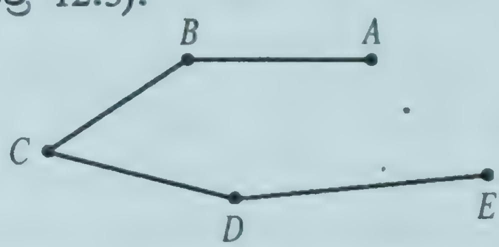
ಚಿತ್ರ 12.2

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರ12.2ನ್ನು ಸೀಸದ ಕಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಾಗದದಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎತ್ತದೆ ಮತ್ತೆ ಎಳೆದ ಕಂಸಗಳನ್ನು ತಿದ್ದದೆ ಬರೆಯುವುದು ಅಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿತು. ಇಂತಹ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು **ಪಾರವಾಹಕ ನಕ್ಷೆಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ನಕ್ಷೆಗಳ ಉಪಯೋಗ ಅನೇಕ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಹತ್ತು ಹಲವಾರು ನಕ್ಷೆಯ ವಿಷಯಗಳ ಬಗೆಗೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

12.2 ನಕ್ಷೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಆಧುನಿಕ ವಿವಿಕ್ತ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ನಕ್ಷೆಗಳು ಒಂದು ಅಗ್ರಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡಿವೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯೇ ಅಲ್ಲದೆ ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದ ವಿವಿಧ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ ನಕ್ಷೆಯ ಉಪಯೋಗ ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿದೆ.

ಐದು ಬಿಂದುಗಳುಳ್ಳ, ನಾಲ್ಕು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಒಂದು ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಚಿತ್ರ 12.3).

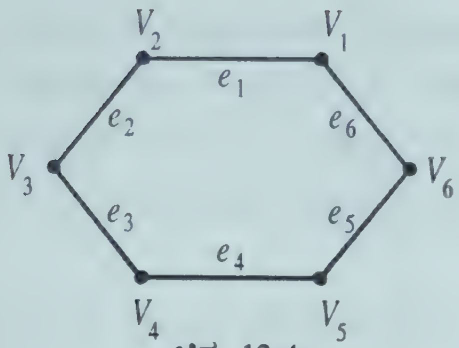


ಚಿತ್ರ 12.3

ಇಲ್ಲಿ A, B, C, D, E ಗಳು ಬಿಂದುಗಳು ಹಾಗೂ AB, BC, CD, DE ಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳು. A, B, C, D, E ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳು (Vertex) ಅಥವಾ ಸಂಪಾತ ಬಿಂದುಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. AB, BC, CD, DE ಗಳನ್ನು ಅಂಚುಗಳು (Edges) ಅಥವಾ ಸೀಮಾರೇಖೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. AB ಅಂಚು A ಮತ್ತು B ಶೃಂಗಗಳಿಂದುಂಟಾದ ಅಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (Unordered Pair) $AB = (A, B)$ ಮತ್ತು $AB = (B, A)$ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. AB ಅಂಚನ್ನು

BA ಎಂದೂ ಸಹ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. BC ಅಂಚನ್ನು CB ಎಂದೂ ಸಹ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಂಚುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳನ್ನು **ನಕ್ಷೆಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 12.4).



ಚಿತ್ರ 12.4

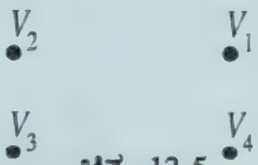
'V' ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ಗಣಗಳು, 'E' ಅಂಚುಗಳ ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು $G(V, E)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಗಳಗಣ V ಶೂನ್ಯಗಣವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಶೃಂಗವಿರಲೇಬೇಕು. ಅಂಚುಗಳಗಣ E ಶೂನ್ಯಗಣವಾಗಿದ್ದರೂ ಸಹ ನಕ್ಷೆಗಳು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಚುಗಳಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಪರವಾಗಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು 'ಶೂನ್ಯ ನಕ್ಷೆಗಳು' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ :



ಚಿತ್ರ 12.5

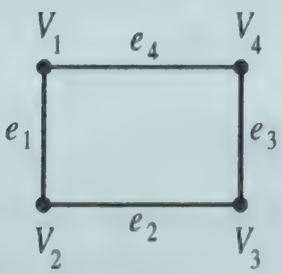
ಚಿತ್ರ 12.5ರಲ್ಲಿ 4 ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಆದರೆ ಒಂದೂ ಅಂಚು ಇಲ್ಲ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots, V_n$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಅಂಚುಗಳನ್ನು $e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots, e_n$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

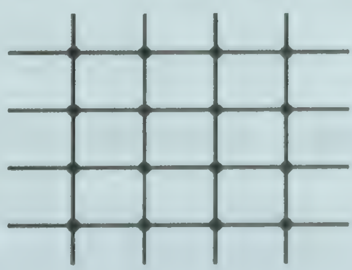
ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ, ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಅವುಗಳ ಬದಲಿಗೆ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಉದ್ದವಾಗಿಯೂ, ತುಂಡಾಗಿಯೂ ಇರಬಹುದು. ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಹಾಗೂ ಅಂಚುಗಳಿಗೆ ಮಿತಿಯೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಪರಿಮಿತ (Finite) ಮತ್ತು ಅಪರಿಮಿತ (Infinite) ನಕ್ಷೆಗಳು

ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಗಳು ಹಾಗೂ ಅಂಚುಗಳು ಪರಿಮಿತ(ಸಾಂತ)ವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಪರಿಮಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಶೃಂಗಗಳು ಅಥವಾ ಅಂಚುಗಳು ಅಪರಿಮಿತ(ಅನಂತ)ವಾಗದ್ದರೆ ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು ಅಪರಿಮಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

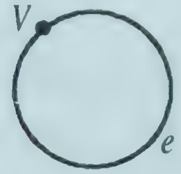


ಚಿತ್ರ 12.6

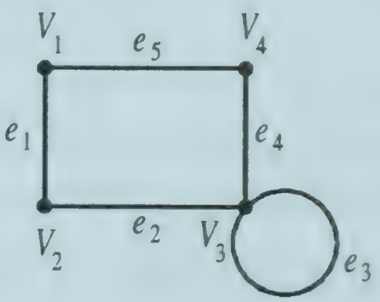

ಚಿತ್ರ 12.7

ಚಿತ್ರ 12.6 ಪರಿಮಿತ ನಕ್ಷೆಗೆ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರ 12.7 ಅಪರಿಮಿತ ನಕ್ಷೆಗೆ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ. ಪರಿಮಿತ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ V_1 ಮತ್ತು V_2 ಶೃಂಗಗಳನ್ನು e_1 ಅಂಚಿನ ತುದಿಯ ಶೃಂಗಗಳು, V_2 ಮತ್ತು V_3 ಯನ್ನು e_2 ಅಂಚಿನ ತುದಿಯ ಶೃಂಗಗಳು, V_3 ಮತ್ತು V_4 ಗಳನ್ನು e_3 ಯ ತುದಿಯ ಶೃಂಗಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವ ಅಂಚನ್ನು ಸುರುಳಿ (loop) ಅಥವಾ ಸ್ವಯಂ ಸುರುಳಿ (self loop) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಶೃಂಗ ಬಿಂದು V ನಿಂದ ಅದೇ ಶೃಂಗಬಿಂದು V ಗೆ ಸೇರಿಸುವ ಕಂಸವನ್ನು ಸುರುಳಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ12.8).

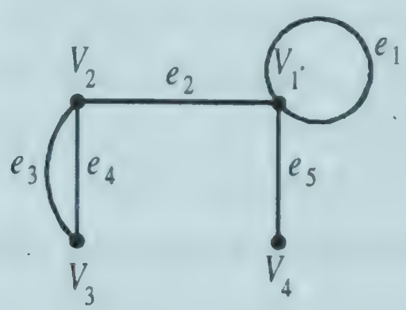


ಚಿತ್ರ 12.8



ಚಿತ್ರ.12.9

ಒಂದು ಸುರುಳಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಚು $e = (V, V)$.

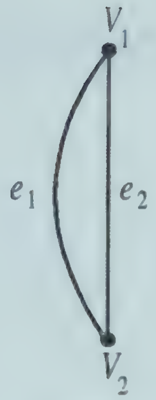


ಚಿತ್ರ 12.10

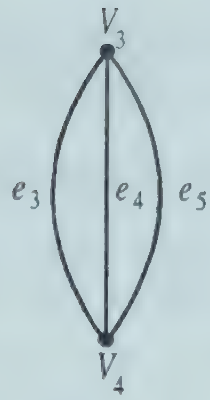
ಮೇಲಿನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.10) 4 ಶೃಂಗಗಳು ಹಾಗು 5 ಅಂಚುಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ, e_1 ಅಂಚು ಸುರುಳಿಯಾಗಿದೆ. $e_1 = (V_1, V_1)$

ಸಮಾನಾಂತರ ಅಂಚುಗಳು (Parallel edges)

ಎರಡು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಅಂಚುಗಳು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಎರಡು ಶೃಂಗಗಳ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಅಂಚುಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 12.11



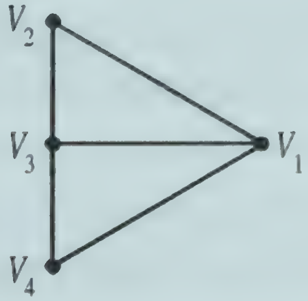
ಚಿತ್ರ 12.12

ಮೇಲಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.11, 12.12) $e_1 = (V_1, V_2)$, $e_2 = (V_1, V_2)$ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗೂ $e_3 = (V_3, V_4)$, $e_4 = (V_3, V_4)$, $e_5 = (V_3, V_4)$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ e_1, e_2 ಗಳು (ಚಿತ್ರ 12.11) ಸಮಾನಾಂತರ ಅಂಚುಗಳು. ಹಾಗೆಯೇ ಚಿತ್ರ 12.12ರಲ್ಲಿ e_3, e_4, e_5ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ.

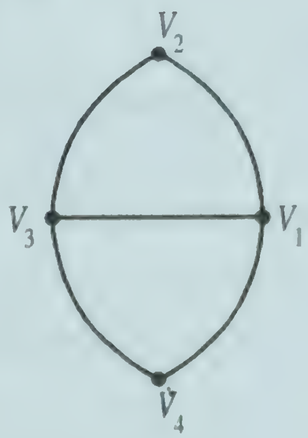
ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ಅಂಚುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಆಪಾತ (incident) ಆಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ:

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡೂ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳ (ಚಿತ್ರ 12.13, 12.14) ನಕ್ಷೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕಾಣಿಸಿದರೂ ಸಹ ಇವೆರಡೂ ನಕ್ಷೆಗಳು ಒಂದೇ. ಎರಡೂ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಚುಗಳು ಮತ್ತು ಶೃಂಗಗಳು ಒಂದೇ ಆಪಾತದಲ್ಲಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 12.13



ಚಿತ್ರ 12.14

ನಕ್ಷೆಯ ವರ್ಗ (Order) **ಮತ್ತು ಆಕಾರ** (Size)

ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಶೃಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ವರ್ಗ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಪರಿಮಿತ ನಕ್ಷೆಯ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಆಕಾರ (ಗಾತ್ರ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

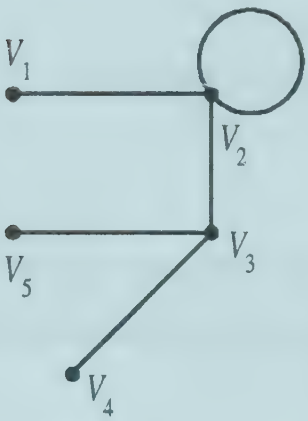
ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ m ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು n ಅಂಚುಗಳಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು (n, m) ನಕ್ಷೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಶೃಂಗಬಿಂದು (ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು)ವಿನ ವರ್ಗ

V ಎನ್ನುವುದು ನಕ್ಷೆಯ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ V ಯಿಂದ ಆಪಾತ ಆಗಿರುವ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಂದರೆ V ಯನ್ನು ಇನ್ನಿತರ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 'ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಗ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಶೃಂಗಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು $\deg(V)$ ಅಥವಾ $d(V)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸುರುಳಿಯ ವರ್ಗ

ಸುರುಳಿಯ ಶೃಂಗಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಗವು ಯಾವಾಗಲೂ 2 ಆಗಿರುವುದು.



ಚಿತ್ರ 12.15

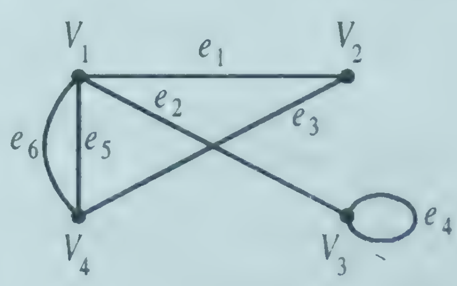
ಇದರಲ್ಲಿನ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಒಂದು ಸುರುಳಿಯನ್ನು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆಯಾಗಿ ಮತ್ತು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿಯೂ ಸಹ ಬರೆಯಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 12.15ರಲ್ಲಿ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ವರ್ಗ ಈ ರೀತಿ ಇವೆ:

$$\deg(V_1) = 1, d(V_2) = 3, d(V_3) = 2$$
$$d(V_4) = 1, d(V_5) = 1.$$

ಸಮಶೃಂಗ ಮತ್ತು ಬೆಸಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳು:

ಒಂದು ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಗವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸಮಶೃಂಗಬಿಂದು ಮತ್ತು ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಗವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಬೆಸಶೃಂಗ ಬಿಂದು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗಗಳ (common vertex) ವರ್ಗವು 2 ಆಗದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಅಂಚುಗಳನ್ನು **ಸರಣಿ** ಅಥವಾ **ಮಾಲೆ** (series) ಯಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



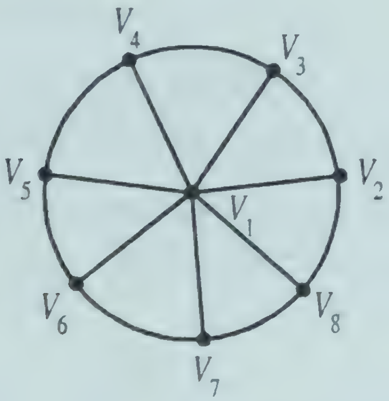
ಚಿತ್ರ 12.16

ಮೇಲಿನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.16) $d(V_1) = 4$, $d(V_2) = 2$, $d(V_3) = 3$, $d(V_4) = 3$.

V_2 ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಗ 2 ಆಗಿದೆ. ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳು e_1 ಮತ್ತು e_3 ಅಂಚುಗಳು ಸರಣಿಯಲ್ಲಿವೆ.

V_1 ಮತ್ತು V_2 ಶೃಂಗಗಳು ಸಮಶೃಂಗಗಳು. V_3 ಮತ್ತು V_4 ಗಳು ಬೆಸ ಶೃಂಗಗಳು

ಚಕ್ರ ನಕ್ಷೆ (Wheel graph)



ಚಿತ್ರ 12.17

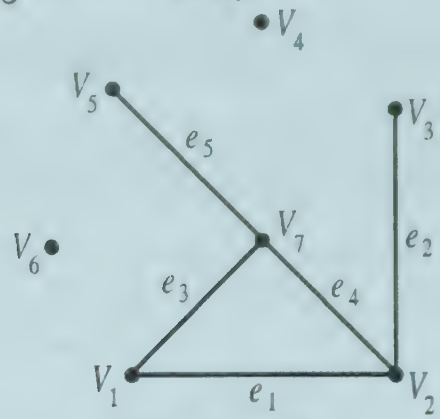
ಮೇಲಿನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.17) 8 ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶೃಂಗವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ ಇನ್ನುಳಿದ ಏಳು ಶೃಂಗಗಳು ವೃತ್ತದ ಕಕ್ಷೆಯ ಮೇಲಿವೆ. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಗ 7 ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದ ಕಕ್ಷೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಗ 3 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಚಕ್ರ ನಕ್ಷೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ವರ್ಗವು 8 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು W_8 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿನ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 14.

n ವರ್ಗವುಳ್ಳ ಚಕ್ರನಕ್ಷೆಯನ್ನು W_n ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶೃಂಗವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು $(n\text{-}1)$ ಶೃಂಗಗಳು ವೃತ್ತದ ಕಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆ. ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಶೃಂಗದ ವರ್ಗವು $(n\text{-}1)$ ಮತ್ತು ಇನ್ನುಳಿದ ಶೃಂಗಗಳ ವರ್ಗವು 3 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $2(n\text{-}1)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ವಿವಿಕ್ತ ಶೃಂಗಬಿಂದು ಮತ್ತು ತೂಗಾಡುವ ಶೃಂಗಬಿಂದು

ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಅಂಚಿನ ಶೃಂಗಬಿಂದುವು ತುದಿಯ ಶೃಂಗವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವನ್ನು ವಿವಿಕ್ತ ಶೃಂಗಬಿಂದು ಎನ್ನುವರು. ಒಂದು ಶೃಂಗಬಿಂದುವಿನ ವರ್ಗ ಶೂನ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ವಿವಿಕ್ತ ಶೃಂಗ ಬಿಂದು ಎನ್ನುವರು.

ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರಮಾಣವು 1 ಆಗದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೂಗಾಡುವ ಅಥವ ಜೋತಾಡುವ ಶೃಂಗಬಿಂದು ಎನ್ನುವರು.



ಚಿತ್ರ 12.18

ಮೇಲಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 12.18) V_4 ಮತ್ತು V_6 ವಿವಿಕ್ತ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳು ಹಾಗು V_3 ಮತ್ತು V_7 ತೂಗಾಡುವ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳು. ಶೂನ್ಯ ನಕ್ಷೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶೃಂಗಬಿಂದುವೂ ವಿವಿಕ್ತ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಕ್ಷುಲ್ಲಕ ನಕ್ಷೆ

ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೃಂಗಬಿಂದುವಿರುವ ಶೂನ್ಯ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಕ್ಷುಲ್ಲಕ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ನಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಮಾಣ (Degree)

ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿವ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಟ ವರ್ಗವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $\delta(G)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. G – ನಕ್ಷೆ.

ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳ ವರ್ಗವು d_1, d_2, d_3, ... d_n ಆಗಿದ್ದು,

$$d_1 \le d_2 \le d_3 \le d_4 \le .... \le d_n$$

ಆಗಿದ್ದರೆ $\{d_1, d_2 .... d_n\}$ನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಗಣ ಎಂದೂ d_1 (ಮೊದಲನೆಯ ಪರಿಮಾಣ) ವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಗರಿಷ್ಠ ವರ್ಗ ಹೊಂದಿರುವ ಶೃಂಗವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $\Delta(G)$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಸಮ(ನಿಯಮಿತ)ಪರಿಮಾಣ ನಕ್ಷೆ

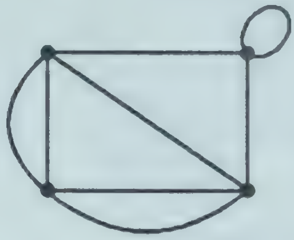
ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳ ವರ್ಗವು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ನಿಯಮಿತ ನಕ್ಷೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ನಿಯಮಿತ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣವು ಕನಿಷ್ಠ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಘನಾಕೃತಿಯ ನಕ್ಷೆ

ಮೂರು ನಿಯಮಿತ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಘನಾಕೃತಿ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.



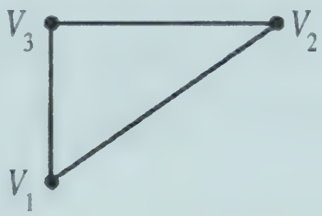
ಚಿತ್ರ 12.19 ಎರಡು ನಿಯಮಿತ ನಕ್ಷೆ



ಚಿತ್ರ 12.20 ನಾಲ್ಕು ನಿಯಮಿತ ನಕ್ಷೆ

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ನಕ್ಷೆ

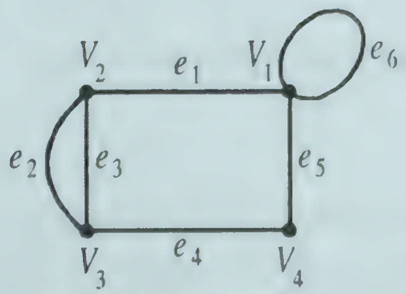
ಸಮಾನಾಂತರ ಅಂಚುಗಳು ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಗಳು ಇಲ್ಲದಿರುವ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆ (ಚಿತ್ರ 12.21)



ಚಿತ್ರ 12.21 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ನಕ್ಷೆ

ಸಾಧಾರಣ ನಕ್ಷೆ

ಸಮಾನಾಂತರ ಅಂಚುಗಳು ಅಥವಾ ಸುರುಳಿಗಳು ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಇರುವ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆ : ಚಿತ್ರ 12.22.

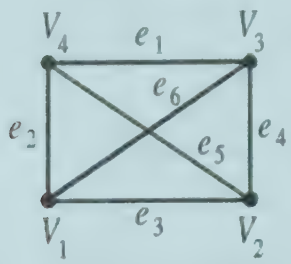


ಚಿತ್ರ 12.22 ಸಾಧಾರಣ ನಕ್ಷೆ

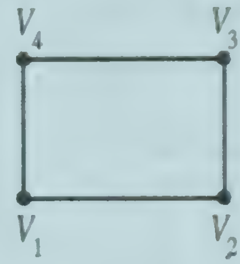
ಸಂಪೂರ್ಣ ನಕ್ಷೆ

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ಯುಗ್ಮವು ಪಾರ್ಶ್ವವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣ ನಕ್ಷೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ

ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶೃಂಗಗಳ ಯುಗ್ಮಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಅಂಚುಗಳು ಏರ್ಪಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಅಂತಹುವುದನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣ ನಕ್ಷೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ಶೃಂಗಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಅಂಚು ಇರಲೇಬೇಕು.



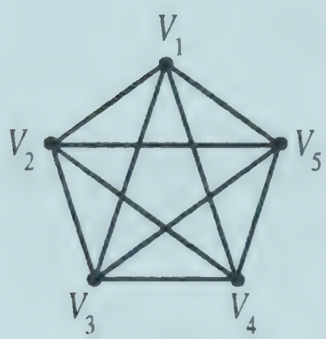
ಚಿತ್ರ 12.23 ಸಂಪೂರ್ಣ ನಕ್ಷೆ



ಚಿತ್ರ 12.24

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚಿತ್ರ 12.23 ಒಂದು ಸಂಪೂರ್ಣ ನಕ್ಷೆ. ಚಿತ್ರ 12.24 ಸಂಪೂರ್ಣ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಶೃಂಗಬಿಂದು V_4, V_2 ಹಾಗೂ V_1, V_3 ಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಅಂಚುಗಳಿಲ್ಲ.

ಚಿತ್ರ 12.25ರ ಸಂಪೂರ್ಣ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 5 ಶೃಂಗಗಳಿವೆ. ಈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು 'ಕ್ಯುರಟೋವ್‌ಸ್ಕಿ'ಯ ಮೊದಲನೆಯ ನಕ್ಷೆ ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.



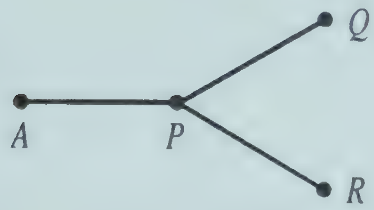
ಚಿತ್ರ 12.25 ಕ್ಯುರಟೋವ್‌ಸ್ಕಿಯ ಮೊದಲನೇ ನಕ್ಷೆ

ದ್ವಿವಿಭಜಿತ ನಕ್ಷೆ

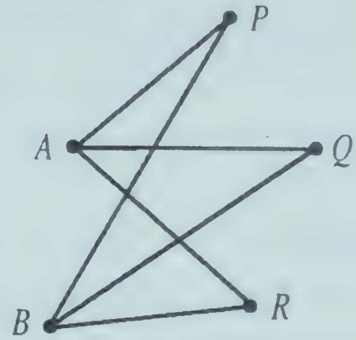
ಬಹಳಷ್ಟು ಅಡ್ಡಗೆರೆಗಳಿರುವ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ದ್ವಿವಿಭಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಕ್ಷೆ Gಯಲ್ಲಿ V ಎನ್ನುವುದು ಶೃಂಗಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದು, V_1 ಮತ್ತು V_2ಗಳು Vಯ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. ಇದರಲ್ಲಿ V_1 ಗಣದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಚು G ಯಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಇಂತಹ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ದ್ವಿವಿಭಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

E ಅಂಚುಗಳುಳ್ಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದರೆ ದ್ವಿವಿಭಜಿತ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು (V_1, V_2 ; E) ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 12.26(i), (ii) ಮತ್ತು (iii) ದ್ವಿಭಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳ ಉದಾಹರಣೆ. **ಚಿತ್ರ 12.26**(i)ರಲ್ಲಿ $V_1 = \{P\}$ ಮತ್ತು $V_2 = \{A, Q, R\}$

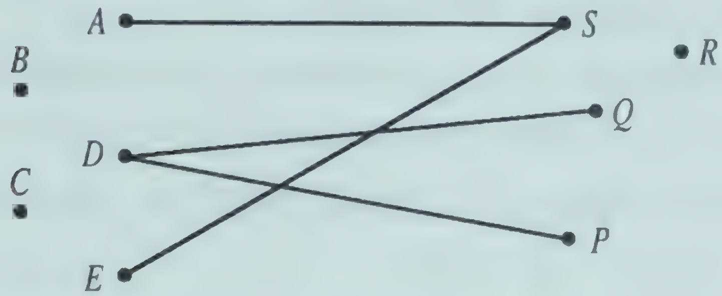


ಚಿತ್ರ 12.26 (i)



ಚಿತ್ರ 12.26 (ii)

ಚಿತ್ರ 12.26 (ii)ರಲ್ಲಿ $V_1 = \{A, B\}$, $V_2 = \{P, Q, R\}$



ಚಿತ್ರ 12.26 (iii)

ಚಿತ್ರ 12.26 (iii)ರಲ್ಲಿ $V_1 = \{A, B, C, D, E\}$, $V_2 = \{P, Q, R, S\}$

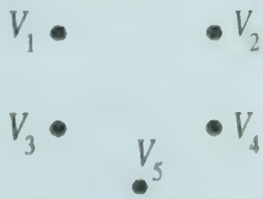
ಶೂನ್ಯ ನಕ್ಷೆ

ಅಂಚುಗಳಿಲ್ಲದ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : ಚಿತ್ರ 12.27 (i) ಮತ್ತು (ii).



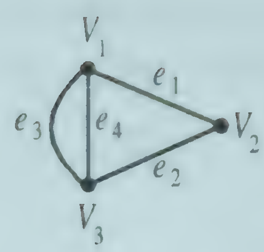
ಚಿತ್ರ 12.27 (i)



ಚಿತ್ರ 12.27 (ii)

ಬಹುರೂಪಿ ನಕ್ಷೆ (ಬಹುವಿಧ ನಕ್ಷೆ)

ಸಮಾನಾಂತರ ಅಂಚುಗಳುಳ್ಳ, ಸ್ವಯಂ ಸುರುಳಿಯಿಲ್ಲದ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಬಹುರೂಪಿ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚಿತ್ರ 12.28.



ಚಿತ್ರ 12.28

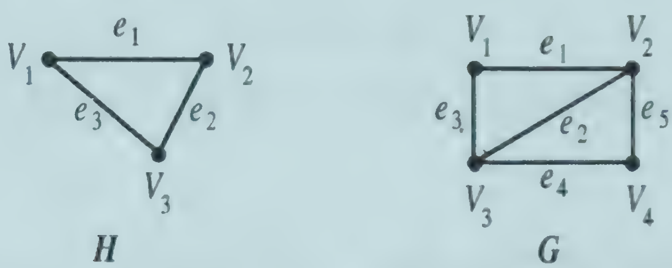
ಉಪನಕ್ಷೆ

H ಮತ್ತು G ಎಂಬ ಎರಡು ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ H ನಕ್ಷೆಯು G ನಕ್ಷೆಯ ಉಪನಕ್ಷೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ

(i) H ನ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಅಂಚುಗಳು G ಯಲ್ಲಿರಬೇಕು

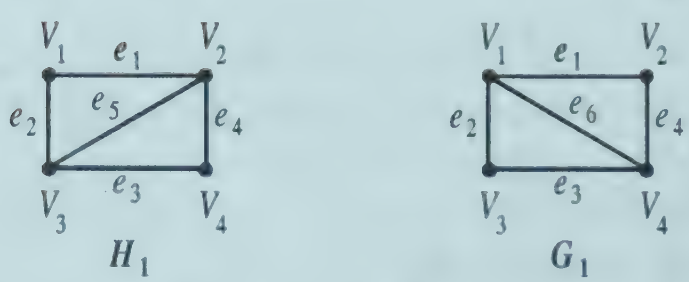
(ii) H ನಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಚಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಶೃಂಗಗಳು G ಯಲ್ಲಿಯೂ ಅವೇ ಪಾರ್ಶ್ವ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ H ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ $V(H)$ ಶೃಂಗಗಣವಾಗಿದ್ದು $E(H)$ ಅಂಚುಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದು ಹಾಗೂ $V(G)$ ನಕ್ಷೆ Gಯಲ್ಲಿನ ಶೃಂಗಗಣವಾಗಿ $E(G)$ ಅಂಚುಗಳ ಗಣವಾಗಿದ್ದಾಗ $V(H) \subseteq V(G)$ ಮತ್ತು $E(H) \subseteq E(G)$ ಆಗಿದ್ದರೆ H ನಕ್ಷೆಯನ್ನು G ನಕ್ಷೆಯ ಉಪನಕ್ಷೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $H \subseteq G$



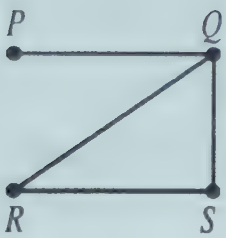
ಚಿತ್ರ 12.29

ಚಿತ್ರ 12.29ರಲ್ಲಿ $H \subseteq G$



ಚಿತ್ರ 12.30

ಚಿತ್ರ 12.30ರಲ್ಲಿ $H_1 \not\subseteq G_1$ $(\because e_5 \notin G_1)$



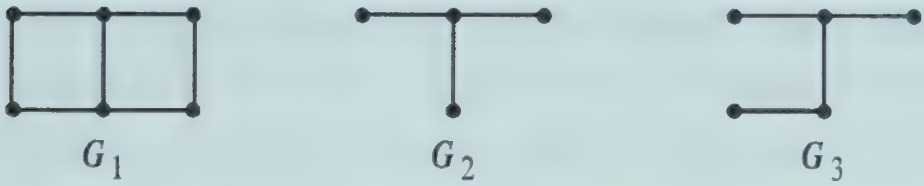
ಚಿತ್ರ 12.31ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ನಕ್ಷೆ G ಆಗಿರಲಿ.

ಚಿತ್ರ 12.31

$H_1 : V_1 = \{P, Q, S\}, \quad E_1 = \{(P,Q),(P,S)\}$ ಮತ್ತು

$H_2 : V_2 = \{Q\}, \quad E_2 = \phi$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, $H_1 \not\subseteq G_1$ ಮತ್ತು $H_2 \subseteq G$

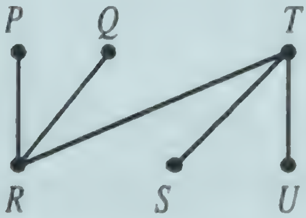


ಚಿತ್ರ 12.32

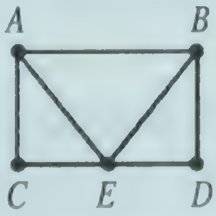
ಚಿತ್ರ 12.32 ರಲ್ಲಿ G_2 ಮತ್ತು G_3 ಎರಡೂ G_1ನಕ್ಷೆಯ ಉಪನಕ್ಷೆಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿನ ಶೃಂಗಗಳು, ಅಂಚುಗಳು ಹಾಗೂ ಶೃಂಗಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 12.33



ಚಿತ್ರ 12.34

ಚಿತ್ರ 12.33ರಲ್ಲಿ 6 ಶೃಂಗಗಳಿವೆ ಹಾಗೂ 5 ಅಂಚುಗಳಿವೆ.

P, Q, S, U ತೂಗಾಡುವ ಶೃಂಗಗಳು (ಪ್ರಮಾಣ 1) ಮತ್ತು

R, T ಶೃಂಗಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 3.

ಚಿತ್ರ ಚಿತ್ರ 12.34 ರಲ್ಲಿ 5 ಶೃಂಗಗಳಿವೆ ಮತ್ತು 7 ಅಂಚುಗಳಿವೆ.

C ಮತ್ತು D ಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 2 ;

E ಯ ಪ್ರಮಾಣ 4 ; ಹಾಗೂ A, B ಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 3 ;

ನಕ್ಷೆಗಳ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

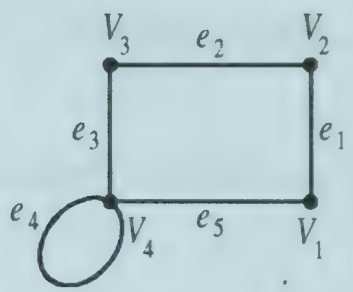
ಪ್ರಮೇಯ 1 : ಹಸ್ತಲಾಘವಗುಣ (Handshaking Property)

ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಇದು ನಕ್ಷೆಯ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಿರುವುದು.

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ p ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳಿದ್ದು, q ಅಂಚುಗಳಿದ್ದರೆ

$$\sum_{i=1}^{p} \deg V_i = 2q.$$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಹಸ್ತಲಾಘವಗುಣ ಎನ್ನುವರು. ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಮಾರಂಭದಲ್ಲಿನ ಅನೇಕ ಜನರು ಒಬ್ಬರನ್ನೊಬ್ಬರು ಭೇಟಿ ಮಾಡುವಾಗ ಹಸ್ತಲಾಘವ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರು. ಆಗ ಹಸ್ತಲಾಘವ ಮಾಡಿದ ಎಲ್ಲಾ ಹಸ್ತಗಳು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು (ಏಕೆಂದರೆ ಹಸ್ತಲಾಘವಕ್ಕೆ 2 ಹಸ್ತಗಳು ಬೇಕೇ ಬೇಕು).



ಚಿತ್ರ 12.35

ಮೇಲಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದ (ಚಿತ್ರ 12.35) ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ 4 ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳು ಅಂದರೆ V_1, V_2, V_3, V_4 ಹಾಗು 5 ಅಂಚುಗಳು e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 ಗಳು ಇವೆ. ಈಗ

$$d(V_1)=2,\ d(V_2)=2,\ d(V_3)=2,\ d(V_4)=2$$

ಶೃಂಗಬಿಂದು V_4 ಸುರುಳಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಇದರ ವರ್ಗವು $(2+2)$ ಆಗಿರುವುದು

$$\therefore\ \Sigma d(V_i) = d(V_1)+d(V_2)+d(V_3)+d(V_4)$$

$$= 2+2+2+4\ = 10$$

ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $q = 5$

$\therefore \quad 2q = 2\times5 = 10 \qquad\qquad \therefore \quad \Sigma d(V_i) = 2q$

ಪ್ರಮೇಯ 2 :

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಬೆಸ ಶೃಂಗಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ :

n ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots V_n$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ k ಶೃಂಗಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಉಳಿದ $(m-k)$ ಶೃಂಗಗಳು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ ವರ್ಗಗಳಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $V_1, V_2, V_3 \ldots\ldots V_k$ ಹಾಗೂ ಸರಿಶೃಂಗಗಳು $V_{k+1}, V_{k+2}, \ldots\ldots V_n$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ

$$\sum_{i=1}^{n} d(V_i) = \sum_{i=1}^{k} d(V_i) + \sum_{i=k+1}^{n} d(V_i)$$

ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಿಂದ ನಮಗೆ $\sum_{i=1}^{n} d(V_i) = 2 \times$ (ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ) ... (1)

ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಅಂದರೆ (1)ರ ಎಡಭಾಗದ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಬಲಭಾಗದ ಎರಡನೆಯ ಮೊತ್ತವು ಸರಿಶೃಂಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಮೊತ್ತವು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಬಲಭಾಗದ ಮೊದಲನೆಯ ಮೊತ್ತವು ಸಹ ಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಲೇಬೇಕು.

$\therefore d(V_1) + d(V_2) + \ldots\ldots + d(V_k) =$ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ .... (2)

ಆದರೆ ಪ್ರತಿ $d(V_1) + d(V_2) + \ldots\ldots d(V_k)$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (2)ರ ಎಡಭಾಗವೂ ಸಹ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಲೇಬೇಕು. ಅಂದರೆ k ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

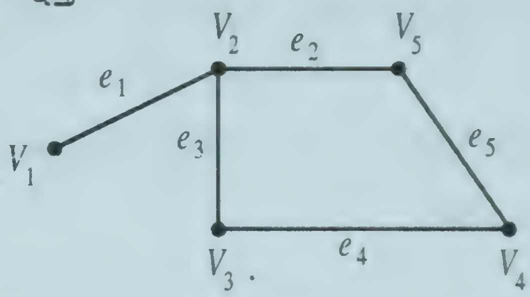
ನಡೆ, ಮಾರ್ಗ ಮತ್ತು ಮಂಡಲ :

ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಅಥವಾ ಅಂಚು ಇರುವ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಈ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಶೃಂಗಗಳ ಪರ್ಯಾಯ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

$ie. V_i e_j V_{i+1} e_{j+1} V_{i+2} ..... e_k V_m.$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಆರಂಭ ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯ ಶೃಂಗವಾಗಿರಬೇಕು. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ಅಂಚು ಶೃಂಗಗಳಿಗೆ ಹಿಂದಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿದ್ದು, ಯಾವುದೇ ಅಂಚು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು **ನಡೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

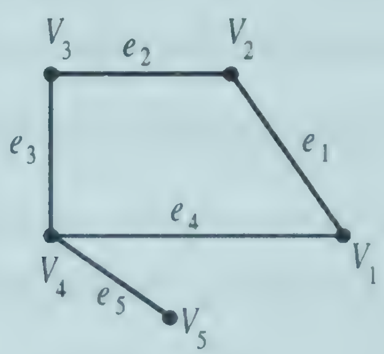


ಚಿತ್ರ 12.36

ಮೇಲಿನ ರೇಖಾಚಿತ್ರದ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ $V_2\ e_3\ V_3\ e_4\ V_4\ e_5\ V_5$ ಮತ್ತು $V_1\ e_1\ V_2\ e_3\ V_3$ ನಡೆಯಾಗಿವೆ.

ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಶೃಂಗವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಶೃಂಗ ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಶೃಂಗವನ್ನು ಅಂತ್ಯಕ ಶೃಂಗ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ನಡೆಯ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಹಾಗೂ ಅಂತ್ಯಕ ಶೃಂಗಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹ ನಡೆಗಳನ್ನು **ಮುಚ್ಚಿದ ನಡೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮುಚ್ಚಿದ ನಡೆಯಲ್ಲದ ನಡೆಯನ್ನು **ತೆರೆದ ನಡೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

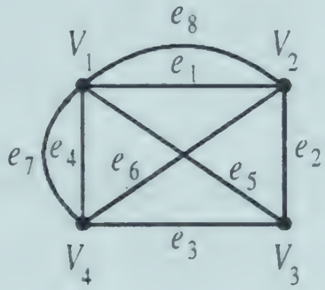


ಚಿತ್ರ 12.37

ಚಿತ್ರ 12.37ರಲ್ಲಿ $V_1 \ e_1 \ V_2 \ e_2 \ V_3 \ e_3 \ V_4 \ e_4 \ V_1$ ಮುಚ್ಚಿದ ನಡೆ ಹಾಗೂ $V_1 \ e_1 \ V_2 \ e_2 \ V_3 \ e_3 \ V_4 \ e_5 \ V_5$ ತೆರೆದ ನಡೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಮಾರ್ಗ : ಒಂದು ತೆರೆದ ನಡೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಶೃಂಗವು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು **ಮಾರ್ಗ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಮಂಡಲ : ಮುಚ್ಚಿದ ನಡೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಕ ಶೃಂಗವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಯಾವ ಶೃಂಗವೂ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಮಂಡಲ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 12.38

ಚಿತ್ರ 12.38ರಲ್ಲಿ $V_1 \ e_4 \ V_4 \ e_3 \ V_3 \ e_2 \ V_2$ ಮತ್ತು $V_1 \ e_4 \ V_4 \ e_3 \ V_3 \ e_2 \ V_2 \ e_6 \ V_4$ ತೆರೆದ ನಡೆಗೆ ಉದಾಹರಣೆ. ತೆರೆದ ನಡೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಶೃಂಗವು ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯಕ ಶೃಂಗವು ಒಂದೇ ಆಗಿರಬಾರದು.

$V_1 \ e_4 \ V_4 \ e_3 \ V_3 \ e_2 \ V_2$ ಮಾರ್ಗಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ.

$V_1 \ e_4 \ V_4 \ e_3 \ V_3 \ e_2 \ V_2 \ e_1 \ V_1$ ಮುಚ್ಚಿದ ನಡೆಗೆ ಉದಾಹರಣೆ.

$V_1 \ e_1 \ V_2 \ e_2 \ V_3 \ e_3 \ V_4 \ e_4 \ V_1$ ಮಂಡಲಕ್ಕೂ ಸಹ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ.

$V_1 \ e_4 \ V_4 \ e_3 \ V_3 \ e_2 \ V_2 \ e_6 \ V_4 \ e_7 \ V_1$ ಮುಚ್ಚಿದ ನಡೆಯಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದು ಮಂಡಲವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ನಡೆ, ಮಾರ್ಗ ಮತ್ತು ಮಂಡಲಗಳ ಉದ್ದ

ಒಂದು ನಡೆ, ಮಾರ್ಗ ಮತ್ತು ಮಂಡಲಗಳಲ್ಲಿನ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನಡೆ, ಚಿತ್ರ 12.38ರಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಗ ಅಥವಾ ಮಂಡಲಗಳ ಉದ್ದ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ತೆರೆದ ನಡೆ $V_1 \ e_4 \ V_4 \ e_3 \ V_3 \ e_2 \ V_2$ ವಿನಲುದ್ದ 3.

ಮಾರ್ಗ $V_1 \ e_4 \ V_4 \ e_3 \ V_3 \ e_2 \ V_2$ ವಿನಲುದ್ದ 3.

ಮಂಡಲ $V_1 \ e_4 \ V_4 \ e_3 \ V_3 \ e_2 \ V_2$ ವಿನಲುದ್ದ 4.



ಚಿತ್ರ 12.39 ರಲ್ಲಿ ನಕ್ಷೆಯು ತೆರೆದನಡೆ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗ

ಚಿತ್ರ 12.39



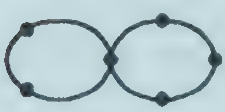
ಚಿತ್ರ 12.40 ರಲ್ಲಿ ನಕ್ಷೆಯು ತೆರೆದನಡೆ. ಆದರೆ ಮಾರ್ಗವಲ್ಲ.

ಚಿತ್ರ 12.40



ಚಿತ್ರ 12.41ರಲ್ಲಿ ಮುಚ್ಚಿದ ನಡೆ ಮತ್ತು ಮಂಡಲ.

ಚಿತ್ರ 12.41



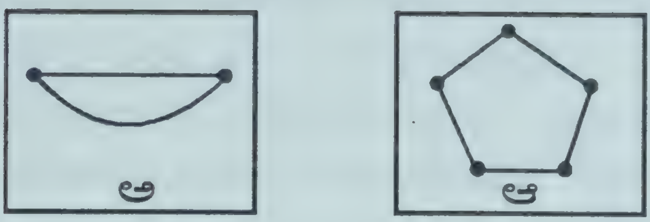
ಚಿತ್ರ 12.42ರಲ್ಲಿ ಮುಚ್ಚಿದ ನಡೆ ಆದರೆ ಮಂಡಲವಲ್ಲ.

ಚಿತ್ರ 12.42

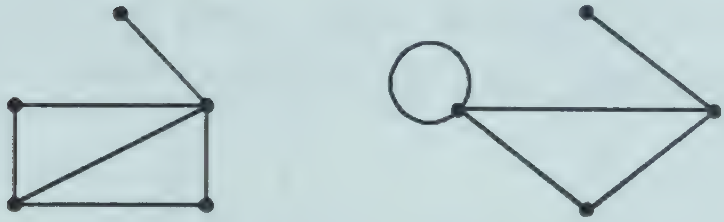
ಯೋಜಿತ ಮತ್ತು ವಿಯೋಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು

ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಶೃಂಗಗಳು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ, ಒಂದಾದರೂ ಮಾರ್ಗವಿದ್ದರೆ ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು **ಯೋಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು (ಚಿತ್ರ 12.43)**, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ **ವಿಯೋಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು (ಚಿತ್ರ 12.43)** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಥವಾ ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶೃಂಗದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಅಂಚುಗಳು ಮೂಲಕ ತಲುಪಿದರೆ ಅಂತಹ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಯೋಜಿತ ನಕ್ಷೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 12.43 ಯೋಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು



ಚಿತ್ರ 12.44 ವಿಯೋಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು

ಆಯ್ಲರ್‌ನ ನಕ್ಷೆಗಳು

ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಸೀಸದ ಕಡ್ಡಿಯ ತುದಿಯನ್ನು ಕಾಗದದಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎತ್ತದೆ ಒಮ್ಮೆ ಬರೆದ ಅಂಚನ್ನು ಮತ್ತೆ ತಿದ್ದದೆ ಇದ್ದರೆ ಅಂತಹ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು **ಪಾರವಾಹಕ ನಕ್ಷೆಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಮುಚ್ಚಿದ ನಡೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಚನ್ನು ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಬಾರಿ ಪ್ರಯಣಿಸಿದರೆ ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು **ಆಯ್ಲರ್‌ನ ರೇಖೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಹ ಆಯ್ಲರ್‌ನ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು **ಆಯ್ಲರ್‌ನ ನಕ್ಷೆಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆಯ್ಲರ್‌ನ ರೇಖೆಯು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆಯ್ಲರ್‌ನ ನಕ್ಷೆಗಳು ಯೋಜಿತ ನಕ್ಷೆಗಳು ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಶೃಂಗಗಳ ವರ್ಗವು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅಂತಹವುಗಳನ್ನು ಆಯ್ಲರ್‌ನ ನಕ್ಷೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

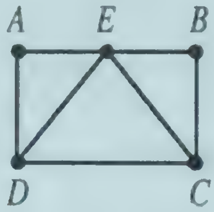
ಅಭ್ಯಾಸ 12

1. ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.
2. ವೀಟ್‌ಸ್ಟನ್ ಬ್ರಿಡ್ಜ್ ಮಂಡಲದ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸಿ.
3. ನಾಲ್ಕು ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳ, ಏಳು ಅಂಚುಗಳುಳ್ಳ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.

4. H_1, H_2, H_3 ಎಂಬ ಮೂರು ಮನೆಗಳಿವೆ. ಗೃಹೋಪಯೋಗಿ ಬಳಕೆಗಳಾದ ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕ್, ವಿದ್ಯುಚ್ಛಕ್ತಿ ಕೋಣೆ ಹಾಗೂ ಅಡಿಗೆ ಅನಿಲದ ಕೋಣೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ *W, E,* ಮತ್ತು *G* ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿತವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮನೆಗೆ ಎಲ್ಲಾ ರೀತಿಯ ಗೃಹೋಪಯೋಗಿ ಬಳಕೆಯ ಕೋಣೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಪರ್ಕ ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಈ ಸಂಪರ್ಕಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ತಾಗುವಂತೆ, ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಹೋಗುವಂತೆ ಇರಬಾರದು.

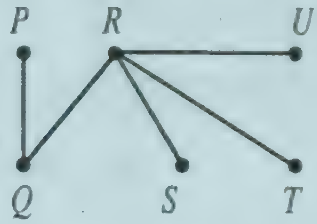
5. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿನ **(ಚಿತ್ರ 12.45, 12.46)** ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i)



ಚಿತ್ರ 12.45

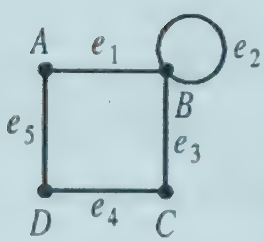
(ii)



ಚಿತ್ರ 12.46

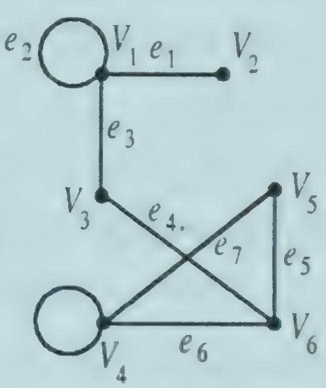
6. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ :

(i)



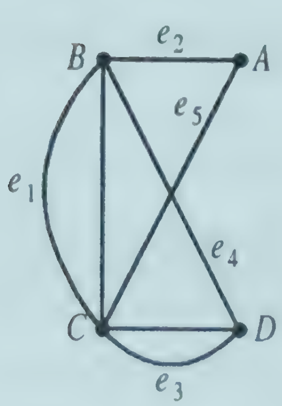
ಚಿತ್ರ 12.47

(ii)



ಚಿತ್ರ 12.48

(iii)



ಚಿತ್ರ 12.49

7. ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಗಳು ಹಸ್ತಲಾಘವ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ :

(i) 

ಚಿತ್ರ 12.50

(ii) 

ಚಿತ್ರ 12.51

8. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಘನ ನಕ್ಷೆಯು ಸರಿ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ ಒಂದೊಂದು ನಕ್ಷೆ $G(V,E)$ ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ :

1) $V = \{P, Q, R, S\}$ $E = \{(P,Q), (Q,R), (P,S), (R,S)\}$

2) $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ $E = \{(V_1, V_2), (V_2, V_5), (V_3, V_4), (V_2, V_3), (V_4, V_1)\}$

3) $V = \{A, B, C, D, E\}$ $E = \{(A,E), (A,D), (B,D)\}$

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ - 1

1. $\frac{4}{(x-3)}-\frac{3}{(x-2)}$ 2. $\frac{1}{(1+3x)}+\frac{1}{(1+2x)}$

3. $\frac{2}{(x-1)}+\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)}$

4. $\frac{2}{(x-1)}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{(2x-1)}$

5. $\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{8x}-\frac{1}{8x(x+2)}$

6. $\frac{3}{2(x-1)}-\frac{7}{(x-2)}+\frac{13}{2(x-3)}$

7. $\frac{1}{(1-3x)}+\frac{1}{(1+2x)}+\frac{1}{(1+x)}$

8. $2x-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{16}{3(x-2)}+\frac{16}{3(x+2)}$

9. $\frac{1}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}+\frac{1}{4(1+x)^2}+\frac{1}{2(1+x)^3}$

10. $\frac{-1}{5(1+2x)^2}+\frac{2}{25(1+2x)}+\frac{3}{25(1-3x)}$

11. $\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}$

12. $\frac{1}{13}\left[\frac{6}{3-2x}+\frac{3x-2}{1+x^2}\right]$

13. $\frac{7}{27x}-\frac{2}{9x^2}-\frac{7}{27(x+3)}+\frac{22}{9(x+3)^2}$

14. $\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2-x}{3(x^2-x+1)}$

15. $\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{3}{(x+2)}$

16. $\frac{2}{(x-1)}+\frac{3x+1}{x^2+x+1}$ 17. $\frac{2}{(x-1)}-\frac{x-2}{(x^2+2)}$

18. $1-\frac{1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}$

19. $\frac{4}{3(x+1)}+\frac{11x-12}{3(x^2-2x+6)}$

20. $\frac{x+2}{2}+\frac{24}{11(x-2)}-\frac{(41x+38)}{22(2x^2+3)}$

21. $\frac{3}{(x-1)}-\frac{2x-2}{(x^2+1)}-\frac{(2x+6)}{(x^2+1)^2}$

22. $\frac{1}{x}-\frac{3x}{3x^2+1}-\frac{(2x-1)}{(3x^2+1)^2}$

23. $1+\frac{20}{7}\left(\frac{2}{x^2+9}-\frac{9}{x^2+16}\right)$

24. $\frac{x}{2}+1+\frac{24}{11(x-2)}-\frac{41x+38}{28(2x^2+3)}$

ಅಭ್ಯಾಸ - 2.1

1. 13.6   2. 467.3   3. 1.923

4. 149.7   5. 2.391×10^{8}

6. 0.23029×10^{-4}

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. -2 2. $\frac{125}{9}$ 3. 5   4. 1000 ಅಥವಾ $\frac{1}{100}$

5. $x = 12$ 6. $x = 16$ 7. $x = 512$ 8. 4

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

3. (i) 17   (ii) 201

ಅಭ್ಯಾಸ 3

ಅ.

1. $n(3n^2-1)$.

2. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

3. $\frac{1}{2}n(4n^2+5n-1)$.

4. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

5. $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$.

6. $\frac{n}{3}(n+1)(6n^2+14n+7)$.

7. 4615.

8. $\frac{n}{6}(4n^2+21n+35)$.

9. $\frac{n}{12}(n+1)^2(n+2)$.

10. $\frac{n}{48}(n+1)(3n^2+11n+10)$.

11. $\frac{n(n+1)}{2}(9n^2+11n-5)$.

12. $\Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

13. $\frac{2n(n+1)(n+2)(3n-1)}{3}$.

14. $\frac{n}{6}(9n^3+20n^2-75n-170)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 5.5

1. $2, 1+i, 1-i$,   2. $-2, -3, 2+i, 2-i$

3. $-1, 3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 7

1. a) p : ಶಾರದೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಹಾಡುತ್ತಾಳೆ ; q : ಶಾಂತಲೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ನಾಟ್ಯವಾಡುತ್ತಾಳೆ.
$p \wedge q$

b) p : ಮಳೆ ಬರುತ್ತದೆ ; q : ಬೆಳೆ ಆಗುತ್ತದೆ.
$p \rightarrow q$

c) p : 2 ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ; q : 5 ಅಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ.
$p \leftrightarrow q$

d) p : 4 ಒಂದು ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ; q : 4 ಒಂದು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ.
$p \vee q$

e) p : $2+3=5$; $2\times3=6$. $p \wedge q$

2. a) $\sim q \wedge s$, b) $r \rightarrow \sim q$

c) $q \rightarrow (\sim p \wedge \sim s)$, d) $p \leftrightarrow q$

3.

i.

p	q	$\sim q$	$p \xrightarrow{x} \sim q$	$\sim x$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F

ii

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

iii

p	q	x $p \wedge q$	y $p \vee q$	$x \rightarrow y$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

iv

p	q	$p \wedge q$	x $\sim (p \wedge q)$	y $q \rightarrow p$	$x \vee y$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T

v

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \to (\sim p \vee q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

vi

p	q	r	$p \vee r$	$(p \vee r) \wedge q$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	F

vii

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$p \to q \wedge (p \to r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

4. (1) $\sim[p \vee (q \wedge r)] = \sim p \wedge \sim(q \wedge r) = \sim p \wedge \sim q \vee \sim r$

(2) $\sim[p \vee (q \to r)] = p \wedge \sim(q \to r) = p \wedge q \wedge \sim r$

(3) $\sim[\sim p \to q] = (\sim p) \wedge \sim q$

(4) $\sim[p \leftrightarrow (p \wedge \sim q)] = [\sim p \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p)]$

$= [\sim p \wedge \sim p \vee q] \vee [p \wedge \sim q \wedge p]$

(5) $\sim[(p \wedge q) \wedge \sim(q \vee r)] = [\sim(p \wedge q) \vee (q \vee r)]$

$= [\sim p \vee \sim q \vee (q \vee r)]$

(6) $\sim[(p \wedge \sim q)] \wedge (\sim p \vee q) = [\sim(p \wedge \sim q) \vee \sim(\sim p \vee q)]$

$= (\sim p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$

(7) $\sim\left[\sim(p\wedge q)\leftrightarrow\sim p\vee\sim q\right]=$

$\left[\sim(p\wedge q)\wedge\sim(\sim p\vee\sim q)\right]\vee\left[\sim p\vee\sim q\wedge\sim\left[\sim(p\wedge q)\right]\right]$

$=\left[(\sim p\vee\sim q)\wedge p\wedge q\right]\vee\left[\sim p\vee\sim q\wedge(p\wedge q)\right]$

(8) p : 2 ರಿಂದ 4 ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ; q : 4 ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ

$\sim(p\rightarrow q)=p\wedge\sim q$

2 ರಿಂದ 4 ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 4 ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ.

(9) p : ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರುಭುಜಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

q : ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

r : ತ್ರಿಕೋಣವು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\sim\left[(p\wedge q)\rightarrow r\right]=(p\wedge q)\wedge\sim r$ ತ್ರಿಕೋಣದ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಅಂತಹ ತ್ರಿಕೋಣವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋಣವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

(10) p : ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯು 1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ.

q : ಹೈಪರ್‌ಬೋಲಾದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯು 1ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು.

$\sim(p\wedge q)=\sim p\vee\sim q$

ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆಯು 1ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಲ್ಲ ಅಥವಾ ಹೈಪರ್ ಬೋಲಾದ ಉತ್ಕೇಂದ್ರತೆ 1ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಲ್ಲ.

5. (1) ವಿಲೋಮ : $\sim q \rightarrow \sim p$, ಪ್ರತಿಲೋಮ : $p \rightarrow q$

ಪ್ರತಿಧನ : $q \rightarrow p$

(2) ವಿಲೋಮ : $(q \rightarrow r) \rightarrow p$, ಪ್ರತಿಲೋಮ : $\sim p \rightarrow \sim (q \rightarrow r)$

ಪ್ರತಿಧನ : $\sim (q \rightarrow r) \rightarrow \sim p$

(3) $p : x^2 = y^2$, $q : x = y$, $p \rightarrow q$

ವಿಲೋಮ : $q \rightarrow p$, $x = y$ ಆದರೆ ಆಗ $x^2 = y^2$

ಪ್ರತಿಲೋಮ : $\sim p \rightarrow \sim q$, $x^2 \neq y^2$ ಆದರೆ ಆಗ $x \neq y$

ಪ್ರತಿಧನ : $\sim q \rightarrow \sim p$, $x \neq y$ ಆದರೆ ಆಗ $x^2 \neq y^2$

(4) $p : n$ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ; $q : n$ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ

$p \rightarrow q$

ವಿಲೋಮ : $q \rightarrow p$, n ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಪ್ರತಿಲೋಮ : $\sim p \rightarrow \sim q$, n 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದಿದ್ದರೆ ಅದು ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ.

ಪ್ರತಿಧನ : $\sim q \rightarrow \sim p$, n ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವಾದರೆ 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ.

(5) $p : x^2 = 1$, $q : x = \pm 1$, $p \rightarrow q$

ವಿಲೋಮ : $q \rightarrow p$, $x = \pm 1$ ಆದರೆ $x^2 = 1$

ಪ್ರತಿಲೋಮ : $\sim p \rightarrow \sim q$, $x^2 \neq \pm 1$ ಆದರೆ $x \neq \pm 1$

ಪ್ರತಿಧನ : $\sim q \rightarrow \sim p$, $x \neq \pm 1$ ಆದರೆ $x^2 \neq 1$

6. (i)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T

ಕೊನೆಯ ಕಾಲಮ್‌ನ ಎಲ್ಲ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಸತ್ಯವಾದುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯು ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೆಂದು ಸಾಧಿತವಾಯಿತು.

ii

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	.T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	F	T

ಕೊನೆಯ ಕಾಲಮ್‌ನ ಎಲ್ಲ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯ.

iii

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$	$[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

ಕೊನೆಯ ಕಾಲಮ್‌ನ ಎಲ್ಲ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯ.

iv

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	x $\sim p \wedge \sim q$	y $\sim (p \vee q)$	$x \leftrightarrow y$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T

ಇದು ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯ.

v

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$q \rightarrow \sim p$	x $(p \rightarrow q) \wedge$ $(q \rightarrow \sim p)$	y $p \rightarrow r$	$x \rightarrow y$
T	T	T	T	F	F	F	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

ಇದೂ ಒಂದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯ.

7. $p: x+3=9$, $q: x=6$; $p \rightarrow q$

(i) ವಿಲೋಮ : $x=6$ ಆದರೆ $x+3=9$.

(ii) ಪ್ರತಿಧನ : $x \neq 6$ ಆದರೆ $x+3 \neq 9$.

8. $p: ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿರುದ್ಧಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$

q: ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\sim[p \leftrightarrow q]=(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಯ ನಕಾರವು ಹೀಗಿದೆ: $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ ಮತ್ತು ಆ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರಿಯ ಮತ್ತು $ABCD$ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

9.

(a)

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	x $p \vee \sim q$	y $\sim(p \vee \sim q)$	$x \wedge y$
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F	F

ಕೊನೆಯ ಕಾಲಮ್‌ನ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಅಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಅಸಮಂಜಸತೆ.

(b)

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

ಇದು ಒಂದು ಅಸಮಂಜಸತೆ.

10.

p	q	r	$\sim r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee \sim r$	x $p \vee \sim r$	y $p \vee q$	z $x \wedge y$	$[(p \wedge q) \vee \sim r] \leftrightarrow z$
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T	T	T	F
T	F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F	F	F	F	T
F	F	F	T	F	T	T	F	F	F

ಕೊನೆಯ ಉದ್ದಸಾಲಿ(ಕಾಲಂ)ನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳೂ T ಮಾತ್ರವಾಗಲೀ F ಮಾತ್ರವಾಗಲೀ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೂ ಅಲ್ಲ, ಅಸಂಮಜಸತೆಯೂ ಅಲ್ಲ.

11. (a)

p	q	r	$q \wedge r$	(5) $p \to (q \wedge r)$	$p \to q$	$p \to r$	(8) $(p \to q) \wedge (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

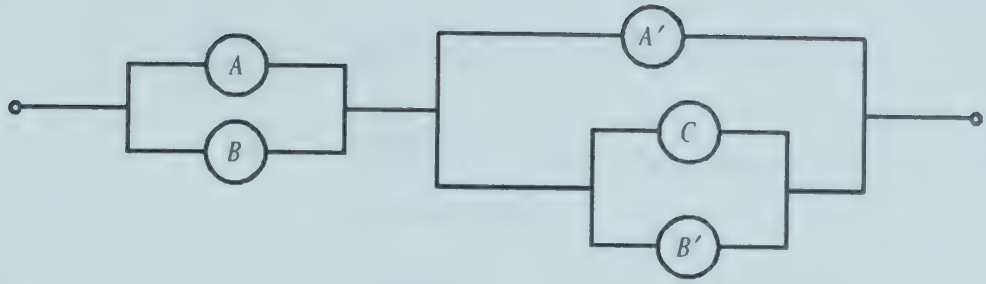
(5)ಮತ್ತು (8) ನೇ ಕಾಲಮ್‌ನ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಒಂದೇ ತೆರನಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

11. (b)

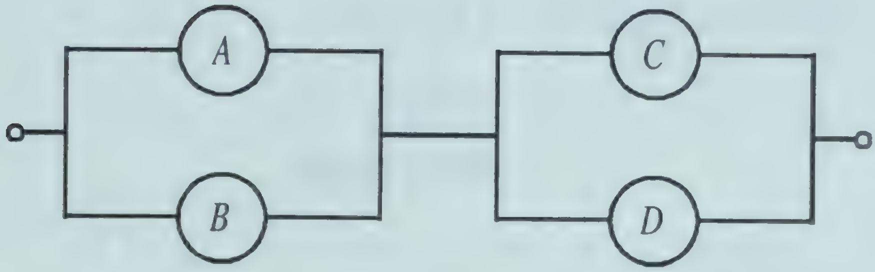
p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$\sim [p \to (q \vee r)]$ (8)	$\sim q \wedge \sim r$	$p \wedge (\sim q \wedge \sim r)$ (10)
T	T	T	F	F	T	T	F	F	F
T	T	F	F	T	T	T	F	F	F
T	F	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	F	T	F	T	F

(8) ಮತ್ತು (10)ನೇ ಕಾಲಮ್‌ನ ನಿಜಮೌಲ್ಯಗಳು ಒಂದೇತೆರನಾಗಿರುವುದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿಗಳು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

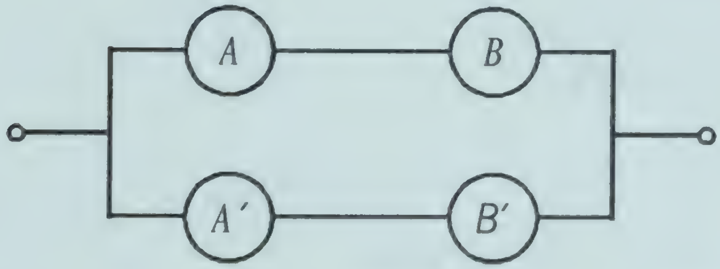
12. (i)



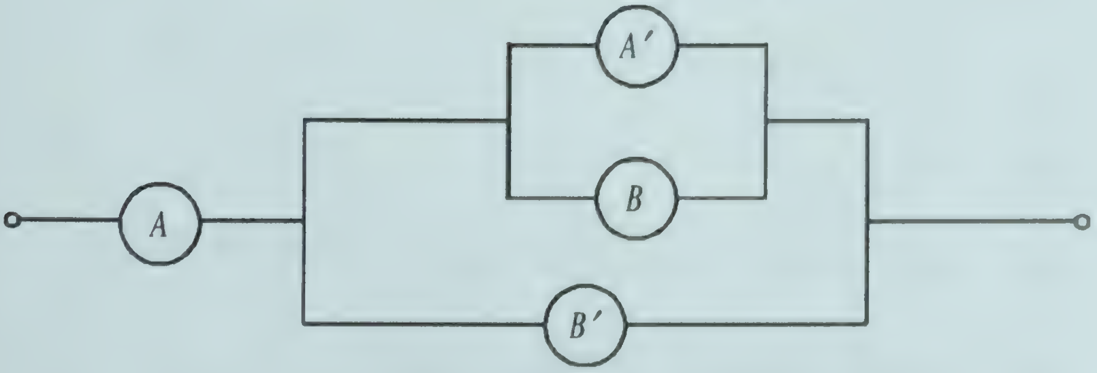
(ii)



(iii)



(iv)



13.

(a) $\left[(A \wedge B) \wedge (C \vee D \vee C') \wedge A' \wedge (B' \vee D')\right]$

(b) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

(c) $\left[(A \wedge B) \vee C\right] \wedge \left[(C' \wedge D) \vee E\right]$

(d) $(A \vee B) \wedge C \wedge (A' \vee B' \vee C')$

ಅಭ್ಯಾಸ - 8

ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ

1. $\{ (0, 5), (0, 6), (0, 7), (1, 5), (1, 6), (1, 7) \}$

2. $\{ \varnothing \}$

3. $\{ (3, 2) \}$

4. $\{ (a, 3), (a, 5), (b, 3), (b, 5) \}$

5. ಹೌದು, f ಏಕ-ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನ

6. $f^{-1}(3) = \{ (1, 2) \}$

7. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

8. $f^{-1}(7) = 5$

9. $fof(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$

10. (i) $4x^2 - 2x + 1$ (ii) 57 (iii) 9

11. (i) $(gof)(x) = 4x^2 + 4x - 1$ (ii) $(fog)(x) = 2x^2 - 3$

12. $(i) 4x^2 - 12x + 14$

(ii) $(gog)(x) = x^4 + 10x^2 + 30$

(iii) $(fog)(a-1)=2a^2-4a+9$

(iv) $(fog)(x+1)=2x^2+4x+9$

ಅಭ್ಯಾಸ - 9

ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ

ಅಭ್ಯಾಸ - 9.1 (ರೇಡಿಯನ್ ಮಾನ)

1. (i) $\frac{7\pi}{9}$ (ii) $\frac{35\pi}{36}$ (iii) $\frac{49\pi}{36}$ (iv) $\frac{-57\pi}{36}$ (v) $\frac{177\pi}{7}$

2. (i) 135° (ii) 1800° (iii) $458^\circ 21' 58.4''$ (iv) 210°

3. (i) $81^\circ, 9^\circ$

4. $\frac{\pi}{3}$

5. $\frac{3\pi}{2}$

6. $34'32''$

7. $\frac{25\pi}{6}$ ಸೆಂ. ಮೀ., $\frac{625\pi}{6}$ ಚದರ ಸೆಂ.ಮೀ.

8. 10.05 ಮೀ.

9. $\frac{7}{398}$ ನಿಮಿಷ

10. 94.248 ಮೀ.

11. 18°

12. (i) $105^\circ 30'$ (ii) 0.586π

13. 11 ಸೆಂ.ಮೀ.

14. $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}$

15. $\frac{4\pi}{9}$

16. 0.28^c

17. $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2 (ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು)

19. $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

$\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$ ಮತ್ತು $\cot\theta = \frac{1}{x}$

20. $\cos A = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}, \tan A = \frac{2x}{\sqrt{9-4x^2}}, \operatorname{cosec} A = \frac{3}{2x}$

$\sec A = \frac{3}{\sqrt{9-4x^2}}$ ಮತ್ತು $\cot A = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x}$

21. $\frac{3}{4}$

22. $3, \frac{7}{3}$

39. $\sec\theta = \frac{p^2+1}{2p}$ $\tan\theta = \frac{p^2-1}{2p}, \sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3 (ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳು)

1. (i) $\frac{1}{4}$ (iii) 0 (iv) $\frac{4}{3}$

2. (i) $\frac{2}{3}, -\frac{7}{2}$ (ii) 0, 2 (iii) -16 (iv) 2

iii. (a) 3, (b) $\frac{1}{8}$

iv. $(i)\ 3 \quad (ii)\ \frac{1}{8}$

v. $\frac{4}{63}$

5. $\frac{-5}{4}$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.4 (ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು)

1. $(i)\ \frac{1}{2} \quad (ii)\ 1 \quad (iii)\ -2 \quad (iv)\ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (v)\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \quad (vi)\ 1$

$(vii)\ \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (ix)\ \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (x)\ 1$

2. $(i)\ 45^\circ, 135^\circ \quad (ii)\ 150^\circ, 210^\circ \quad (iii)\ 210^\circ, 330^\circ$

$(iv)\ 135^\circ, 315^\circ \quad (v)\ 135^\circ, 225^\circ$

3. $(i)\ -1 \quad (ii)\ 0 \quad (iii)\ 2$

11. $\frac{19}{11}$

12. $\frac{2}{45}$

13. $\frac{50}{39}$

16. $\frac{-\cos A}{\sin^2 A}$

17. 0

18. $\sec A$

19. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

20. $-2\sqrt{2}$

21. 0

22. $\frac{1}{2}$

23. $\frac{1}{2}$

24. $\frac{2}{3}$

25. $\frac{1-a^2}{1+a^2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.5 (ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು)

1. $\frac{8-3\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}-6}{15}$

2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

6. $\frac{1}{3}$

24. $\frac{455}{697}, \frac{672}{697}$

25. $\frac{221}{21}, \frac{221}{220}, \frac{21}{220}$

27. $\frac{\pi}{4}$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.6 (ಗುಣಿತ, ಉಪಗುಣಿತ ಕೋನಗಳು)

1. (i) $\frac{161}{289}$ (ii) $\frac{-7}{25}$ (iii) $\frac{119}{169}$

2. $\frac{\sqrt{3-1}}{2\sqrt{2}}$

5. a

38. $\frac{7}{25}, \frac{-24}{7}$

39. $\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.7 (ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳು)

1. (i) $\sin 10\theta - \sin 2\theta$ (ii) $\cos\theta - \cos 4\theta$

   (iii) $\frac{1}{2}(\cos 8\theta + \cos 6\theta)$ (iv) $\frac{1}{2}(\sin 8\theta + \sin 2\theta)$

2. (i) $2\sin 3x \cos 2x$ (ii) $-2\sin 3\theta \sin\theta$ (iii) $-\cos 20^\circ$

   (iv) $\cos 1^\circ$

47. $\frac{3}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{24}{7}$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.8 (ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ದೂರಗಳು)

1. 50 ಮೀ.

2. $\frac{300}{\sqrt{3}}$ ಮೀ., $\frac{600}{\sqrt{3}}$ ಮೀ.

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ಕಿ.ಮೀ.

5. 136.6 ಮೀ.

6. $20+\sqrt{3}$ ಮೀ.

8. 30^{o}

ಅಭ್ಯಾಸ 9.9 (ತ್ರಿಕೋಣದ ಭುಜ-ಕೋನಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳು)

20. $\frac{2}{5}$

31. $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{13}}$

32. $\sqrt{2}-1$

33. 120^{o}

34. 30^{o}

ಅಭ್ಯಾಸ - 10
(ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ)

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1 (ದೂರದ ಸೂತ್ರ)

1. $2\sqrt{5}\left(2+\sqrt{2}\right)$

4. $y=8$ **ಅಥವಾ** $y=-4$

5. $\left(-\frac{37}{5},0\right)$

6. $(2,-4), (-2,4)$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2 (ವಿಭಜನ ಬಿಂದುಗಳು)

1. (i) $\left(\frac{21}{5}, \frac{14}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{-7}{4}, \frac{-5}{4}\right)$

   (iii) $(22, -22)$ (iv) $(10, -4)$

2. $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

3. $(3,1), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

4. $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(0, \frac{-1}{2}\right)$

5. 6, 8, 6

6. $(4, 2), (2, 4), (1, 1)$

7. $(7, 2)$

8. $\left(\frac{-2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

9. $(5, 3)$

10. $x-$ಅಕ್ಷವು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ $1:2$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ; $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

$y-$ಅಕ್ಷವು ಅಂತರೀಯವಾಗಿ $3:1$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ; $(0, -5)$

11. $(1, -5)$

12. ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $3:4$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ

13. $\frac{\sqrt{58}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}, 4$

14. $(-8, 1)$

15. $3:1$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ, $a = -3$

16. $4\sqrt{17}$

17. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)\left(-\frac{5}{3}, 2\right)$

18. $(0, 0)$

19. $(8, 14)$

20. $(1, -2), (2, 1), \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{7(3-\sqrt{5})}{2}\right]$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.3 (ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ)

1. (i) 4 (ii) 38 (iii) 33

2. (i) 5 (ii) $\dfrac{33}{2}$ (iii) 9

3. $a = -3$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.4 (ಬಿಂದು ಪಥ ಸಮೀಕರಣ)

1. $x = y$

2. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

3. $x - y + 1 = 0$

4. $x - 2y - 1 = 0$

5. $3x - 2y - 32 = 0$

6. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 13 = 0$

7. $x^2\left(m^2\ n^2\right) + y^2\left(m^2 - n^2\right) - 2axm^2 + m^2a^2 = 0$

8. $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 18 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.5 (ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು)

1. $2x + 2\sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$

2. $\sqrt{3}x + y - 7 = 0$

3. $2x - 7y + 62 = 0$

4. $28x + 7y - 26 = 0$

5. $3y - 2 = 0$

6. $y + 5 = 0$

7. $4x - 3 = 0$

8. $x + 8 = 0$

9. $x - y + 1 = 0$

10. (i) $3x - 2y + 3 = 0$ (ii) $4x - y = 0$

(iii) $2x - y(t_2 + t_1) - 2a\, t_1\, t_2 = 0$

(iv) $x + y\, t_1\, t_2 - a(t_2 + t_1) = 0$

(v) $5x + 6y - 8 = 0$

11. $6x - 5y - 30 = 0$

12. $x - y + 5 = 0$

13. $2x + y - 12 = 0$

14. $5x + 4y - 20 = 0$, $5x + y + 10 = 0$

15. $4x + 3y - 17 = 0$

16. $2x - y + 7 = 0$

17. $x + 2y - 4 = 0$

18. $4x - 3y - 12 = 0$

19. (i) ಓಟ $= \frac{-y_1}{x_1}$

(ii) $\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right)x + \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right)y = \frac{2x_1 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

(iii) $p = \frac{2x_1\, y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

20. $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$

21. (i) $3x - 3y - 8\sqrt{2} = 0$ (ii) $x + y - 3\sqrt{2} = 0$

(iii) $x + \sqrt{3}y + 10 = 0$

22. (i) $a = -2$ (ii) $a = \frac{1}{2}$ (iii) $a = \frac{3}{2}$

23. 1:3

24. 10:9

25. 5:7

ಅಭ್ಯಾಸ 10.6 (ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ)

3. $2x - 3y = 0$

4. $7x + 4y - 26 = 0$

5. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$

6. $10x + 6y - 43 = 0$

7. $5x - 2y + 8 = 0$

8. $5x + 2y + 23 = 0$

9. (i) $2x + 7y + 8 = 0$ (ii) $7x + 2y + 8 = 0$ (iii) $x - y = 0$

10. (i) $3x - 5y + 9 = 0$ (ii) $5x + 3y - 19 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.7 (ಛೇದನ ಬಿಂದು, ದ್ವಿಬಾಹುಗಳು)

1. $2x - y - 3 = 0$

2. $x - 4y - 5 = 0$

3. $19x - 19y + 59 = 0$

4. $9x - 3y + 11 = 0$

5. $5x + 6y + 10 = 0$

6. $(-3, 2)$

7. $\left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$

8. $(11, -9)$

9. $(-4, -3)$

10. $x + y + 2 = 0$

11. $100x + 59y + 300 = 0$

13. $(-1, 2)$

14. (i) $k = 2$ (ii) $k = 2$

16. 1

17. $\frac{8}{\sqrt{19}}$

18. $(3, 2)$

19. $y = 2x + 11$

20. (i) $\frac{7}{\sqrt{10}}$ (ii) $\frac{1}{5}$

21. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 198x - 164y + 589 = 0$

22. $x - 4y = 0$

23. $6x + 6y - 5 = 0, 2x - 2y - 1 = 0$

25. (i) $7x - 56y + 65 = 0$ (ii) $99x + 27y + 14 = 0$

(iii) $3x - 3y + 8 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.8 (ಜೋಡಿ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು)

1. (a) $2x + y = 0,\ 3y - 4x = 0,\ \theta = \tan^{-1}(2)$

   (b) $3x - y = 0,\ 2x - y = 0,\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

   (c) $2x + y = 0,\ x - 2y = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2}$

2. $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$

7. $\frac{-10}{9}, \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

8. $\frac{5}{2}$ ಅಥವಾ $\frac{10}{3}$

9. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)$

10. $\frac{3}{2}, 11\sqrt{5}$

12. $3x + 4y - 1 = 0$ ಮತ್ತು $4x - 3y + 1 = 0;\ \left(-\frac{1}{25}, \frac{7}{25}\right)$

13. $a = 2,\ c = -3$

ಅಭ್ಯಾಸ - 11.1

ಮಿತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ

1. $f(1) = 6,\ f(2) = 15,\ f(-2) = 3$

3. $g(0) = 1,\ g(\pi) = -3$

4. $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

ಅಥವಾ

$f(xy) = \log x + \log y$, $f\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$

7. (i) ಸರಿಉತ್ಪನ್ನ, (ii) ಬೆಸಉತ್ಪನ್ನ, (iii) ಬೆಸಉತ್ಪನ್ನ

(iv) ಸರಿಉತ್ಪನ್ನ, (iv) ಸರಿಯೂ ಅಲ್ಲದ ಮತ್ತು ಬೆಸವೂ ಅಲ್ಲದ ಉತ್ಪನ್ನ

(vi) ಸರಿಉತ್ಪನ್ನ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. 1 2. $-\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{32}$ 4. 12. 5. $\frac{2}{5}$ 6. $\frac{1}{5}$

7. $\frac{7}{13}$ 8. 1 9. $\frac{1}{2}$ 10. $\frac{2}{5}$ 11. –1 12. 1

13. $\frac{2}{3}$ 14. $\frac{2}{9}$ 15. $\frac{1}{2}$ 16. $\frac{1}{4}$ 17. $\frac{4}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$

18. $\frac{3}{4}$ 19. $\frac{1}{2}$ 20. –2 21. 2 22. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

23. $\frac{1}{4}$ 24. $-\frac{1}{2}$ 25. $\frac{1}{24}$ 26. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$ 27. 2

28. $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ 29. 0 30. $\frac{5}{2}$ 31. $\frac{1}{2}$ 32. $\frac{5}{2}$ 33. 3

34. $\frac{2}{3}$ 35. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ 36. $\frac{3}{5}$ 37. $\frac{3}{2}$ 38. ∞

39. $\frac{2}{5}$ 40. 5 41. $\frac{1}{2}$ 42. $\frac{1}{4}$ 43. $\frac{1}{4}$ 44. $\frac{1}{2}$

45. 0 46. $\frac{1}{4}$ 47. $\frac{3}{4}$ 48. $\frac{1}{6}$ 49. $\frac{7}{18}$ 50. $\frac{2}{3}$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. 32 2. $\frac{9}{2}$ 3. $\frac{-3}{512}$ 4. $\frac{15}{2}$ 5. $\frac{-1}{8}$

6. $2\sqrt{a}$ 7. 1280 8. $\frac{4}{3}$ 9. $\frac{3}{2}$ 10. $\frac{20}{3}$

11. $3^{5/3}$ 12. $\frac{n}{m}$ 13. $4a$ 14. 80 15. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

16. $\frac{1}{2}$ 17. $\frac{1}{2}$ 18. 2 19. 0 20. $\frac{1}{4}$

21. 0 22. -4 23. $\frac{1}{2}$ 24. $\cos a$ 25. $2\cos a$

26. $\frac{b^2-a^2}{2}$ 27. $\frac{5}{2}$ 28. 0 29. 1 30. $\frac{2}{\pi}$

31. $\frac{1}{2}$ 32. 4 33. 2 34. $-\frac{1}{2}$ 35. π

36. e^2 37. e^{-3} 38. e^{-3} 39. $e^{6/5}$ 40. $e^{8/9}$

41. $e^{-6/25}$ 42. 5 43. $\frac{2}{3}$ 44. 2 45. e^3

ಅಭ್ಯಾಸ 11.6 (ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ)

I 1. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಕ್ಯ 2. $x = 0$: ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ; $x = 1$: ವಿಚ್ಛಿನ್ನ

3. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ 4. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ

5. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ 6. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ

7. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ 8. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ

9. ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ 10. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ

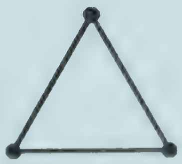
II 1. $K = \frac{1}{2}$

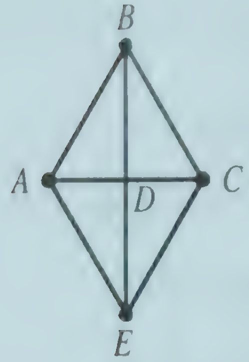
2. $K = 3$

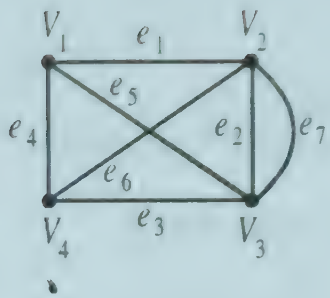
3. $K = 5$

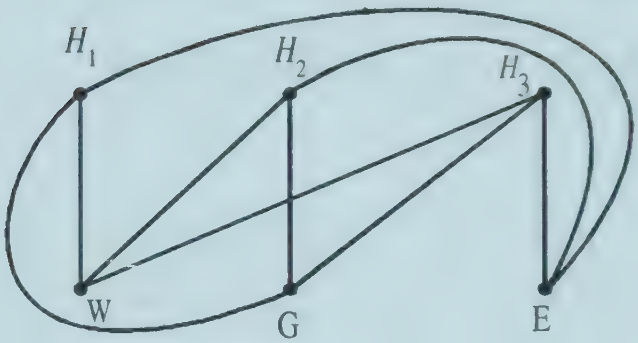
ಅಭ್ಯಾಸ 12

1. (*i*)

(*ii*)  (*iii*)  (*iv*) 

2. 

3. 

4. 

5. *i)* ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ : 5

ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ : 7

*A, B*ಗಳ ಪ್ರಮಾಣ : 2

C, D ಗಳ ಪ್ರಮಾಣ : 3

E ಯ ಪ್ರಮಾಣ : 4

ii) ಶೃಂಗಳ ಬಿಂದುಗಳು : 6

ಅಂಚುಗಳು : 5

*P, S, T, U*ಗಳ ಪ್ರಮಾಣ : 1

Q ನ ಪ್ರಮಾಣ : 2

R ನ ಪ್ರಮಾಣ : 4

6. *(i)* $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

(ii) $V = \{V_1, V_2, ..., V_6\}$, $E = \{e_1, e_2, ..., e_7\}$

7. *(i)* ಹೌದು

ಅಂಚುಗಳು : 10

ಶೃಂಗ ಪ್ರಮಾಣ : $3 \times 5 + 5 = 20$

$= 20 = 2 \times 1$

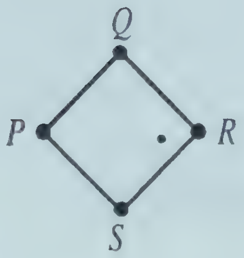
(ii) ಹೌದು

ಅಂಚುಗಳು : 7

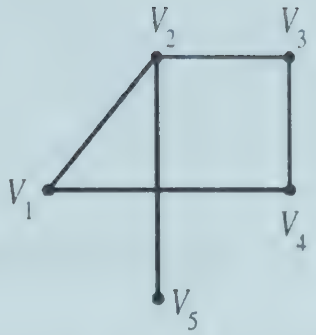
ಶೃಂಗ ಪ್ರಮಾಣ : $2 \times 4 + 3 \times 2$

$= 8 + 6 = 14 = 2 \times 7$

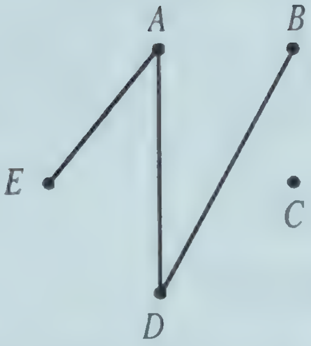
9. (i)



(ii)



(iii)



ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳು

ಪ.ಪೂ. ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು 5 ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ (ಎಸೈನ್ಮೆಂಟ್) ಲೇಖನಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆ ಒಪ್ಪಿಸತಕ್ಕದ್ದು. ಇವುಗಳ ವಿಷಯಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಮಾದರಿಗಳಲ್ಲಿದ್ದು ಒಂದೊಂದು ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗೆ ಗರಿಷ್ಠ 10 ಅಂಕಗಳು. ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 5 ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ 5 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿಕೊಂಡು ಒಬ್ಬೊಬ್ಬ ಅಭ್ಯರ್ಥಿಗೂ ನೀಡಬೇಕು.

ವಿಷಯಗಳು

ಎ - ಮಾದರಿ

1. ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು : ಉದಾಹರಣೆಗೆ $(3.2)^{98}$ ಮುಂತಾದ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಘಾತವುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಿಗಳ (ಡಿಜಿಟ್ಸ್) ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಹಾಗೆಯೇ, $(0.2)^{15}$ ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ದಶವಮಾಂಶಸ್ಥಾನದ ನಂತರ ಇರುವ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.
2. ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಮೇಲೆ ಲೆಕ್ಕಗಳು
3. ದ್ವಿಪದೀಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ದ್ವಿಪದೀಯ ಗುಣಾಂಕಗಳ (ಬೈನಾಮಿಯಲ್ ಕೋ - ಎಫಿಷಿಯಂಟ್ಸ್) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ಮೊತ್ತಗಳ ಲೆಕ್ಕಗಳು.
4. ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ : ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಸಂಬಂಧಿತ ಮೂರನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ದರ್ಜೆ (ಡಿಗ್ರಿ)ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು.
5. ಗಣಿತ ತರ್ಕ : ಪ್ರಮಾಣದ (ಸಾಧನೆಯ, ಪ್ರೂಫ್) ಮತ್ತು ಅಪ್ರಮಾಣೀಕರಣದ (ಡಿಸ್ಪ್ರೂಫ್) ನಿದರ್ಶನಗಳು. ಗಣಿತತರ್ಕದ ಅನ್ವಯಗಳು - ಸ್ವಿಚಿಂಗ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ಸ್‌ಗಳಿಂದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು.
6. ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಸಮೀಕರಣ : ಕೆಲವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಕರಾರುಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಪಥ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು. ಜೋಡಿ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

7. ಎತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ದೂರಗಳು : ನಿಶ್ಚಿತ ಕೋನಗಳಲ್ಲದ (30°, 45°, 60° .... ಅಲ್ಲದ) ಬೇರೆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ (ಗಣಿತ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ) ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು.

ಹಾಗೆಯೇ, ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಕೋನಗಳನ್ನು ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಬಿ - ಮಾದರಿ

ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೃತಿಗಳ ಮತ್ತು ಕೊಡುಗೆಗಳ ಪರಿಚಯ

1) ಆಪಸ್ತಂಬ ಮತ್ತು ಬೌಧಾಯನ (ಶುಲ್ವಸೂತ್ರಗಳು)

2) ಆರ್ಯಭಟ - I 3) ಭಾಸ್ಕರ - I

4) ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ 5) ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ

6) ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ - II 7) ಅಪೊಲೋನಿಯಸ್

8) ಯುಕ್ಲಿಡ್ 9) ಪೈಥೊಗೊರಸ್

ಸೂಚನೆ : ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಪೈಕಿ ಈ ಮೇಲಿನ ಎ ಮತ್ತು ಬಿ ಮಾದರಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದರಲ್ಲೂ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ 2 ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೂ ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಇಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಬರುವಂತಹ ಮತ್ತು ಸ್ಫೂರ್ತಿ ನೀಡುವಂತಹ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ವಿಷಯಗಳನ್ನಾದರೂ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಎ ಮತ್ತು ಬಿ ಮಾದರಿಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಥಮ ಪಿ.ಯು.ಸಿ.ಯ ಯೋಜನೆಗಳು

ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಆದೇಶದ ಮೇರೆಗೆ, ಪ್ರಥಮ ಪಿ.ಯು.ಸಿ.ಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ನಮೂನೆಯ 5 ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಬೇಕು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಯೋಜನೆಯನ್ನು 10 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡಿ ನಂತರ ಅಂತಿಮವಾಗಿ ಐದೂ ಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳನ್ನು 5 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕು.

ಯೋಜನೆ 1 : $\log x$, e^x , $\frac{1}{x}$, $|x|$, $[x]$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳು.

ಯೋಜನೆ 2 : ರೇಡಿಯನ್ ಪರಿಮಾಣ ; $s = r\theta$ ಮತ್ತು $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

– ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳು.

ಯೋಜನೆ 3 : ದ್ವಿಪದಿ ಪ್ರಮೇಯ :

(i) ಪ್ಯಾಸ್ಕಲ್‌ನ ತ್ರಿಕೋಣದ ರಚನೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಲಕ್ಷಣಗಳು.

(ii) ದ್ವಿಪದಿ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $(1.02)^6$, $(0.99)^5$, $(101)^7$ .... ಇವುಗಳ ಮೌಲ್ಯ ನಿರ್ಣಯ.

(iii) ದ್ವಿಪದಿ ಸಹಾಂಕಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರಪಡಿಸುವುದು.

ಯೋಜನೆ 4 : ದತ್ತ ಶೃಂಗಗಳಿಂದ ತ್ರಿಕೋಣ ABCಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

(i) C ಬಿಂದುವಿಗೆ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಹಾಗೂ $\Delta ABC = \Delta ABD = \Delta ABE$ ಆಗಿರುವ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) C ಬಿಂದುವಿಗೆ ಏಕರೇಖಸ್ಥವಲ್ಲದ ಹಾಗೂ $\Delta ABC = \Delta ABF = \Delta ABG$ ಆಗಿರುವ F ಮತ್ತು G ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಯೋಜನೆ 5 : ಸಂಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು.

(i) ಗಣವೊಂದರಲ್ಲಿ ಆತ್ಮವರ್ತಕ, ಸಮ್ಮಿತ ಹಾಗು ಪ್ರವಹನಶೀಲ ಸಂಬಂಧಗಳು ಸ್ವತಂತ್ರ ಎಂದು ರೂಪಿಸಿ.

(ii) A ಮತ್ತು B ದತ್ತಗಣಗಳಾಗಿದ್ದು, $F: A \longrightarrow B$ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ,

a) ಏಕ - ಏಕ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ?

ಹೌದೆನ್ನುವುದಾದರೆ, ಅಂತಹ ಎಷ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದು ?

b) ಮೇಲಣ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬಲ್ಲಿರಾ ?

ಹೌದಾದರೆ, ಅಂತಹ ಎಷ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದು ?

c) ಏಕ-ಏಕ ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಎರಡೂ ಆಗಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಲ್ಲಿರಾ?

ಅದು ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ, ಅಂತಹ ಎಷ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಬಹುದು?

ಯೋಜನೆ 6 :

1. ದತ್ತ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವೆನ್ನುವುದನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.
2. ಸಾಮಾನ್ಯ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. ಸರಳರೇಖೆಯ ವಿಚ್ಛೇದನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ನಿರ್ದೇಶಕ ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಿಗೆ ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ರ್ಮಿತವಾದ ತ್ರಿಕೋಣದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಲಂಬರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

   ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸರಳರೇಖೆಯ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಯೋಜನೆ 7 :

1. $x = a,\ y = b$ ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮ್ಮಿಳನ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ದತ್ತ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ (ಸಮಜಾತೀಯವಲ್ಲದ) ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿ.

(ii) ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದರೊಂದಿಗೆ ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ.

ಯೋಜನೆ 8 :

1. ಬಹುಭುಜಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಆಯ್ಲರ್‌ನ ಸೂತ್ರ $F + V = E + 2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

2. ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ :

(a) ಏಳು ಸೇತುವೆಗಳ ಲೆಕ್ಕ

(b) ಚೀನಾದ ಅಂಚೆಯವನ ಲೆಕ್ಕ

(c) ನಕ್ಷೆಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣಹಚ್ಚುವುದು (ನಾಲ್ಕು ಬಣ್ಣಗಳಿಂದ ಕಲ್ಪಿತವಾದದ್ದು)

(d) ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಇತರ ಲೆಕ್ಕಗಳು

ಯೋಜನೆ 9 :

ತಾರ್ಕಿಕ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಅಂಶಿಕ ಭಿನ್ನಾಂಶಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ವಿಭಜನೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

1. $$\frac{3x^3+4x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+1},$$

ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ, ಏಕೆ?

2. $$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}$$

ಇದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ' ಏಕೆ?

3. ಗಣಿತದ ಉದ್ಗಮನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $n(n+1)(2n+1)$ ಸಂಖ್ಯೆಯ 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ರೂಪಿಸಿ.

4. ಗಣಿತದ ಉದ್ಗಮನದ ಮೂಲಕ 5 ರಿಂದ $4^{2n}-1$ ಅನ್ನು ಭಾಗಿಸಬಹುದೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

5. ಗಣಿತ ಉದ್ಗಮನದಿಂದ $a, a+d, a+2d, ...$ ಇದರ n^{th} ಪದವು $a+\overline{n-1}d$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

ಸೂಚನೆ : ಉಪನ್ಯಾಸಕರುಗಳು ವಿಧ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆಸಕ್ತಿಯುಂಟುಮಾಡುವ ಬೇರೆ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸಹ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆ

ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು : 90

ಕಾಲ : 3 ಘಂಟೆಗಳು

ಸೂಚನೆ : (1) ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯು ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.
(2) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಗಳ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಬೇಕು.
(3) ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ನಮೂದಿಸಬೇಕು.

ಭಾಗ - 1

ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ. $10 \times 1 = 10$

1. $\log_{64} 1024 = x$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ 0. ಮೂರನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $\left(3x^2 - y/3\right)^9$ ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ 7ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,5\}, C = \{2,4,6\}$ ಆಗಿದ್ದರೆ $(A \cap B) \times (B - C)$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. "2 ಎನ್ನುವುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ , 2 ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುವುದು" ಇದರ ವಿಲೋಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

6. $\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^3 - 1}{x - 1} \right]$ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. (2,2) ಮತ್ತು (4, 6) ಬಿಂದುಗಳ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ 1:3 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಗೊತ್ತುಮಾಡಿ.

8. $\frac{7\pi}{12}$ ರೇಡಿಯನ್‌ನ್ನು ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

9. ಸರಳೀಕರಿಸಿ : $\cos 120^\circ + \cos 10^\circ$

10. $3x + y = 0$ ಮತ್ತು $15x + 5y - 8 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಭಾಗ - 2

ಕೆಳಗಿನಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ. $10 \times 2 = 20$

11. $\dfrac{x-6}{(x^2+x-6)}$ ನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

12. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $A.P$ ಯಲ್ಲಿವೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

13. ಉಕ್ತಿ $\sim(p \vee q) \vee (q \leftrightarrow p)$ ಯ ನಿಜಮೌಲ್ಯ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

14. $f : R \to R$ ಮತ್ತು $g : R \to R$ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು $f(x) = x^2 + x + 1$ ಮತ್ತು $g(x) = 2x - 1$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $f \circ g(x)$ ಮತ್ತು $g \circ f(3)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $\cos(270^0 + A)\cos(90^0 - A) - \sin(270^0 - A)\cos A = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $\cos 15^\circ$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\tan^2 45^0 - \cos^2 60^0 - x\sin 45^0 \cos 60^0 = 0$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. $\tan(\alpha + \beta) = 1$ ಮತ್ತು $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ ಆದರೆ $\tan\beta$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $3x - y - 5 = 0$ ಮತ್ತು $4x + y - 9 = 0$ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು (4, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. $A(a, -4), B(1, -1)$ ಮತ್ತು $C(5, 2)$ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ a ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

21 $x^2 + Kxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ K ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

22. ಶೂನ್ಯ ನಕ್ಷೆ ಎಂದರೇನು? 3 ಶೃಂಗಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಶೂನ್ಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಭಾಗ - 3

ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ 8 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ. $8 \times 5 = 40$

23. ಅ) $f: Q \to Q$ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $f(x) = 2x - 5$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ $f^{-1}(2)$ ರ ಬೆಲೆಯೇನು ? 2

ಆ) $a^2 + b^2 = 7ab$ ಆದರೆ $\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 3

24. $x = \log_a bc$, $y = \log_b ca$, $z = \log_c ab$ ಆದರೆ $xyz = x + y + z + 2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

25. ಗಣಿತಾನುಮಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$1.3 + 2.4 + 3.5 ...... + n(n+1) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+7)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r)]$ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ನಿತ್ಯಸತ್ಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

27. $\frac{x^2}{(x^2+1)(x+1)}$ ನ್ನು ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ. 5

28. ಅ) $\frac{\cos A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cos A - \operatorname{cosec} A + 1} = \frac{1 + \cos A}{\sin A}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

ಆ) $\frac{(\sin 8\theta + \sin 2\theta)(\cos\theta - \cos 3\theta)}{(\sin 5\theta - \sin\theta)(\cos 4\theta - \cos 6\theta)} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 2

29. ಅ) ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

ಆ) $\cos A=\frac{4}{5}, 0°<A<90°$ ಇದ್ದಾಗ $\cos 2A$ ಬೆಲೆಯೇನು ? 1

30. $c=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}$ ಮತ್ತು $B=45°$ ಇದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋಣ ABC ಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

31. ಅ) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ
$\cos 2A-\cos 2B+\cos 2C=1-4\sin A\cos B\sin C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 1

ಆ) ABC ತ್ರಿಕೋಣದಲ್ಲಿ $\tan(B+C)=-\tan A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 1

32. $A(3,3), B(6,2), C(-2,8)$ ಇರುವ ABC ತ್ರಿಕೋಣದ ಬಾಹ್ಯ ಪರಿವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

33. ಅ) $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+2=0$ ಸಮೀಕರಣವು ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

ಆ) $4x^2+4xy+y^2-6x-3y-4=0$ ಸಮೀಕರಣವು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ. 1

34. $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ R ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಂತರೀಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದಾಗ ಆಂತರೀಯ ವಿಭಜನಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ PQ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

ಭಾಗ - 4

ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ 2 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ. $2 \times 10 = 20$

35. ಅ) (i) ಒಂದು ರಸ್ತೆಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಎತ್ತರದ ಎರಡು ಕಂಬಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳ ಬುಡಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರಸ್ತೆಯು 100 ಮೀ ಅಗಲವಾಗಿದೆ. ಈ ರಸ್ತೆಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನು ನಿಂತು ನೋಡಿದಾಗ ಕಂಬಗಳ ಉನ್ನತಕೋನಗಳು 60° ಮತ್ತು 30° ಆಗಿದ್ದರೆ ಕಂಬಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವೀಕ್ಷಕನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆ) $\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+........n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

36. ಅ) ಜ್ಯಾಮೀತಿಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

ಆ) (i) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2+2^2+........n^2}{n^3}\right]$ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

(ii) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right]$ ಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

37. ಅ) ${C_0}^2+{C_1}^2+........{C_n}^2=\frac{2n!}{n!n!}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 6

ಆ) ಕೆಳಗಿನ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿನ ಶೃಂಗಗಳು ಹಾಗೂ ಅಂಚುಗಳೆಷ್ಟಿವೆ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ



ಇ) $\cos 570°\sin 30°-\cos(-390°)\sin(-30°)$ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

38. ಅ) $-2-i\sqrt{7}$ ಎಂಬುದು $x^4+2x^2-16x+77=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವಾದರೆ ಇನ್ನುಳಿದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

ಆ) $A(x_1, y_1)$ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $ax+by+c=0$ ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಲಂಬದೂರ $\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

ಇ) $8x^2+8xy+2y^2+2x+y-15=0$ ಸಮಾಂತರ ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

ಅನುಬಂಧ

ಕನ್ನಡ-ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳ ಪಟ್ಟಿ

ಅಂಕಿ	Digit
ಅಂಗ	Component
ಅಂಚು	Edge
ಅಂಶ	Degree
ಅಕ್ಷ	Axis
ಅಧಿಕಕೋನ	Obtuse angle
ಅನಂತ	Infinity
ಅನುರೂಪಕ	Complementary
ಅಪರಿಮಿತ ಪದಗಳು	Infinite terms
ಅಪರಿಮಿತ ಶ್ರೇಢಿ	Infinite series
ಅಪವರ್ತನ	Factor
ಅಪವರ್ತನೀಕರಣ	Factorization
ಅಪವರ್ತ್ಯ	Multiple
ಅಪಸರಣ	Divergent
ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ	Anticlockwise
ಅಭಿಸರಣ	Covergent
ಅವನತಕೋನ	Angle of depression
ಅವ್ಯಾಖ್ಯಾತ	Undefined
ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Improper fraction

ಅಷ್ಟ ಭುಜಾಕೃತಿ	Octagon
ಅಸಮಂಜಸತೆ	Contradiction
ಆಂಶಿಕ ಕ್ರಮ	Partial order
ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Partial Fraction
ಆಕಾರ	Shape
ಆತ್ಮವರ್ತಕ	Reflexive
ಆಪಾತ	Incident
ಉಕ್ತಿ	Expression, Proposition
ಉತ್ಪನ್ನ	Function
ಉತನ್ನ ಕೋನ	Angle of elevation
ಉನ್ನತಿ	Altitude
ಊಹ್ಯ (ಊಹ್ಯಾತ್ಮಕ)	Imginary
ಊಹ್ಯಮಾನ	Imaginary Unit
ಋಣ	Negative
ಎರಡನೆಯ ಘಾತ	Second degree
ಏಕ ಬಿಂದುಸ್ಥ	Concurrent
ಏಕರೇಖಸ್ಥ	Collinear
ಐಕ್ಯಧಾತು	Unity
ಓಟ	Slope

ಕಂಸ	Arc
ಕರ್ಣ	Diagonal
ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ	Calculus
ಕೋಟಿ	Abscissa
ಕೋನ	Angle
ಕ್ರಮಯೋಜನೆ	Permutation
ಕ್ಷುಲಕ ನಕ್ಷೆ	Thivialgraph
ಖಂಡ	Segment
ಗಣಿತಾನುಮಾನ	Mathematical induction
ಗಣಿತ ಉದ್ಗಮನ	Mathematical induction
ಗಾತ್ರ	Size
ಗುಣಕ	Co- efficient Multiplier
ಗುಣಲಬ್ಧ	Product
ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕ	Geometric mean
ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ	Geometric progression
ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ	Centroid
ಘಟಕ	Component
ಘನಮೂಲ	Cube root
ಘಾತಾಂಕಗಳು	Indices
ಚಕ್ರನಕ್ಷೆ	Wheel graph
ಚತುರ್ಭುಜ	Quadrilateral
ಚತುರ್ಮೂಲ	Fourth root
ಚರಾಕ್ಷರ	Variable
ಛೇದಕಗಳು	Intercepts
ಜಾಲ	Network
ಡೋಲಾಯಮಾನ	Oscillatory
ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆ	Logical equivlence
ತಾಳೆ ನೋಡು	Verify
ತ್ರಿಕೋಣ, ತ್ರಿಭುಜ	Triangle
ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ	Trigonometry
ತ್ರಿಜ್ಯ	Radius
ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ	Sector
ತೂಗಾಡುವ-ಶೃಂಗಬಿಂದು	Pendant vertex
ದರ್ಜೆ	Order
ದ್ವಿಬಂಧಿತ	Biconditional
ದ್ವಿಭಜಿತ ನಕ್ಷೆ	Bipartite graph
ದ್ವಿಭಾಜಕ	Bisector
ಧನ	Positive
ನಕಾರ	Negation
ನಡೆ	Walk
ನಕ್ಷೆ	Graph
ನಿತ್ಯಸತ್ಯ	Tautology
ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ	Identity
ನಿರ್ದೇಶಕ	Cordinate
ನಿರ್ಬಂಧಿತ	Restricted Implication, Conditional

ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆ	Real number
ಪರಿಕೇಂದ್ರ	Circum - centre
ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ	circum - radius
ಪರಿಧಿ	Circumference
ಪರಿಮಿತ	Finite
ಪರಿವೃತ್ತ	Circum-circle
ಪರ್ಯಾಯ	Disjunction
ಪಾದ	Quadrant
ಪುನರಾವೃತ್ತಿ-ಹೊಂದುವ	Recurring
ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ	Projection
ಪ್ರಚಯ	Common difference
ಪ್ರತಿಘಾತ	Logarithm
ಪ್ರತಿಧನ	Contrapositive
ಪ್ರತಿಫಲನ	Reflexion
ಪ್ರತಿಲೋಮ	Inverse
ಪ್ರತಿಸಮಮಿತ	Antisymmetric
ಪ್ರಥಮಪದ	First term
ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ	Clockwise
ಪ್ರಮಾಣ	Degree, Ratio
ಪ್ರಮೇಯ	Theorem
ಪ್ರವಹನೀಯ	Transitive
ಬಹುಘಾತಪದಿ	Polynomial
ಬಹುಮುಖಘನ	Polyhedra
ಬಹುರೂಪೀ ನಕ್ಷೆ	Multigraph

ಬಾಗು	Inclination
ಬಾಹು	Side
ಬಿಂದುಪಥ	Locus
ಬೆಸ ಶೃಂಗಬಿಂದು	Odd vertex
ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ	Odd number
ಭುಜ	Ordinate
ಮಂಡಲ	Circuit
ಮಧ್ಯರೇಖೆ	Median
ಮಾರ್ಗ	Path
ಮಿತಿ	Limit
ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	Complex number
ಮೂಲ	Root
ಮೂಲ ನಿಯಮ	Fundamental law
ಮೂಲಮಾನ	Unit
ಮೂಲಸೂತ್ರ	Fundamental principle
ಮೊತ್ತ	Sum
ಯೋಜಿತ	Connected
ರೇಖಾಗಣಿತ	Geometry
ರೇಖಾಂತರ	Intercept
ರೇಖೀಯ	Linear
ಲಂಬಕೇಂದ್ರ	Orthocentre
ಲಂಬಕೋನ	Right angle
ಲಂಬನಿರ್ದೇಶಕಗಳು	Rectangular coordinates
ಲಘುಕೋನ	Acute angle

ವರ್ಗ	Order, square
ವರ್ಗಮೂಲ	Square root
ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ	Quadratic equation
ವಜ್ರಾಕೃತಿ	Rhombus
ವರ್ತುಳೀಯ	Circuluar
ಕ್ರಮಯೋಜನೆ	Permutation
ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ	Real numbers
ವಿಕಲ್ಪ	Combination
ವಿಭಜಿತ	Partite
ವಿಭಜಿತ ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Partial fraction
ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	Composite number
ವಿಯೋಜಿತ	Disconnected
ವಿಲೋಮ	Inverse, Reciprocal, Converse
ವಿವಿಕ್ತ	Discrete
ವಿವಿಕ್ತ ಶೃಂಗಬಿಂದು	Isolated vertex
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	Area
ವ್ಯಂಜನ	Consonant
ಶತಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ	Centesimal system
ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Proper fraction
ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ	Perfect square
ಶೃಂಗಗಳು	Vertices
ಶೃಂಗಬಿಂದು	Vertex
ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ	Remainder theorem
ಶೋಧಕ	Discriminant
ಶ್ರೇಢಿ	Series, Progression
ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ	Factorial
ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿ	Sexagesimal system
ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸು	Simplify
ಸಂಖ್ಯೆ	Number
ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕ	Hamonic mean
ಸಂಪಾತ ಬಿಂದು	Vertex
ಸಂಬಂಧಿತ	Allied
ಕೋನಗಳು	Angles
ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ	Composite number
ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ	Compound proposition
ಸಂಯೋಜಕಗಳು	Connectives
ಸಮತಲ	Plane
ಸಮತೋಕ್ತಿ	Equivalence proposition
ಸಮದೂರ	Equidistant
ಸಮದ್ವಿಬಾಹು	Isosceles
ತ್ರಿಕೋಣ	triangle
ಸಮಪರಿಮಾಣ ನಕ್ಷೆ	Regular graph
ಸಮಭುಜ	Equilateral
ತ್ರಿಕೋಣ	triangle

ಸಮಮಿತ	Symmetric	ಸಾಮಾನ್ಯ	Common
ಸಮ ಶೃಂಗಬಿಂದು	Even vertex	ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ	Common difference
ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ	Even number	ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗ	Common verterx
ಸಮಾಂಗ	Symmetric	ಸುರುಳಿ	Loop
ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ	Arithmetic mean	ಸೂತ್ರ	Formula
ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ	Arithmetic progression	ಸ್ಥಾನಾಂತರ	Shift
ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ	Paralleogram	ಸ್ಥಿರಗುಣಕ	Constant coefficient
ಸಮಾನತಾ	Equivalence	ಸ್ಥಿರಾಂಗ	Fixed number
ಸಮೀಕರಣ	Equation	ಸ್ವತುಲ್ಯ	Reflexive
ಸಮುಚ್ಚಯ	Conjunction	ಸ್ವರ	Vowel
ಸರಿಸಂಖ್ಯೆ	Even number	ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ	Natural number
ಸಹವರ್ತಿ	Conjugate	ಕಾಂತಶ್ರೇಢಿ	Finite Series
ಸಹಾಂಕ	Co-efficient	ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ	Horizontal line
ಸಾಂತ	Finite	ಕ್ಷುಲಕ ನಕ್ಷೆ	Trivial graph
ಸಾಂತಶ್ರೇಢಿ	Finite series		
ಹಸ್ತ ಲಾಘವಗುಣ	Handshaking property		

ಅನುಬಂಧ

ಇಂಗ್ಲಿಷ್-ಕನ್ನಡ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳ ಪಟ್ಟಿ

Abscissa	ಕೋಟಿ, x-ನಿರ್ದೇಶಕ
Acute angle	ಲಘುಕೋನ
Allied angles	ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು
Altitude	ಉನ್ನತಿ
Analytical geometry	ನಿರ್ದೇಶಕ ರೇಖಾಗಣಿತ
Angle	ಕೋನ
Angle of depression	ಅವನತ ಕೋನ
Angle of elevation	ಉನ್ನತ ಕೋನ
Anticlockwise	ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ
Antisymmetric	ಪ್ರತಿಸಮಮಿತ
Arc	ಕಂಸ
Area	ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
Arithmetic mean	ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಕ
Arithmetic progression	ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ
Axis	ಅಕ್ಷ
Biconditional	ದ್ವಿಬಂಧಿತ, ಸಮತೋಕ್ತಿ
Binomial	ದ್ವಿಪದ
Biparte graph	ದ್ವಿಭಜಿತ ನಕ್ಷೆ
Bisector	ದ್ವಿಭಾಜಕ
Calculus	ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ
Centesimal system	ಶತಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ
Centroid	ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ
Circuit	ಮಂಡಲಿ
Circular permutation	ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ
Circum-centre	ಪರಿಕೇಂದ್ರ
Circum-circle	ಪರಿವೃತ್ತ
Circumference	ಪರಿಧಿ
Circum-radius	ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ
Clockwise	ಪ್ರದಕ್ಷಿಣೆ
Co-efficient	ಸಹಾಂಕ, ಗುಣಕ
Collinear	ಏಕರೇಖಸ್ಥ
Combination	ವಿಕಲ್ಪ
Common	ಸಾಮಾನ್ಯ
Common difference	ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ, ಪ್ರಚಯ

Common ratio	ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ	Cube root	ಘನಮೂಲ
Common vertex	ಸಾಮಾನ್ಯ ಶೃಂಗ	Decomposition	ಸಂವಿಭಜನೆ
Complementary	ಅನುಪೂರಕ	Degree	ಪ್ರಮಾಣ, ಅಂಶ
Complex number	ಮಿಶ್ರ ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	Diagonal	ವಿಕರ್ಣ
Component	ಅಂಕ, ಘಟಕ	Diameter	ವ್ಯಾಸ
Composite number	ಸಂಯುಕ್ತ (ವಿಭಾಜ್ಯ) ಸಂಖ್ಯೆ	Digit	ಅಂಕಿ
Compound proposition	ಸಂಯುಕ್ತೋಕ್ತಿ	Disconnected	ವಿಯೋಜಿತ
Concurrent	ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ	Discrete	ವಿವಿಕ್ತ
Conditional	ನಿಬಂಧಿತ	Discriminant	ಶೋಧಕ
Conjugate	ಸಹವರ್ತಿ	Disjunction	ಪರ್ಯಾಯ
Conjunction	ಸಮುಚ್ಚಯ	Divergent	ಅಪಸರಣ
Connected	ಯೋಜಿತ	Edge	ಅಂಚು
Consonant	ವ್ಯಂಜನ	Equation	ಸಮೀಕರಣ
Constant	ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ	Equidistant	ಸಮದೂರ
Contradiction	ಅಸಂಜಸತೆ	Equilateral triangle	ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋಣ
Contrapositive	ಪ್ರತಿಧನ	Equivalence	
Convergent	ಅಭಿಸರಣ	Proposition	ಸಮಾನತಾ
Converse	ವಿಲೋಮ	Equivalence	ಸಮತೋಕ್ತಿ
Co-ordinate	ನಿರ್ದೇಶಕ	Even vertex	ಸಮಶೃಂಗ ಬಿಂದು
Concurrent	ಏಕಬಿಂದುಸ್ಥ	Expression	ಉಕ್ತಿ
geometry	ರೇಖಾಗಣಿತ	Factor	ಅಪವರ್ತನ
Co-ordinates	ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು	Factorial	ಶ್ರೇಣಿ ಗುಣಲಬ್ಧ
Corresponding	ಅನುರೂಪ	Factorization	ಅಪವರ್ತನೀಕರಣ
		Finite	ಸಾಂತ, ಪರಿಮಿತ
		First term	ಪ್ರಥಮ ಪದ

Fixed number	ಸ್ಥಿರಾಂಕ
Formula	ಸೂತ್ರ
Fourth root	ಚತುರ್ಮೂಲ
Function	ಉತ್ಪನ್ನ
Fundamental principle	ಮೂಲ ಸೂತ್ರ
Geometric mean	ಗುಣೋತ್ತರ ಮಧ್ಯಕ
Geometric progression	ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ
Graph	ನಕ್ಷೆ
Hand shaking property	ಹಸ್ತ ಲಾಘವ ಗುಣ
Harmonic mean	ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಕ
Harmonic progression	ಸಂಗತ ಶ್ರೇಢಿ
Horizontal line	ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆ
Identity	ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ
If and only if (iff)	ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಆಗಬೇಕಿದ್ದರೆ
Imaginary	ಊಹ್ಯ, ಊಹ್ಯಾತ್ಮಕ
Imaginary unit	ಊಹ್ಯಮಾನ
Implication	ನಿಬಂಧಿತ
Improper fraction	ಅಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ
Incident	ಆಪಾತ
Indices	ಘಾತಾಂಕಗಳು
Inclination	ಬಾಗು
Infinite series	ಅನಂತ (ಅಪರಿಮಿತ) ಶ್ರೇಢಿ
Infinite terms	ಅನಂತ (ಅಪಶಿಮಿತ) ಪದಗಳು
Infinity	ಅನಂತ
Interecept	ರೇಖಾಂತರ, ಛೇದಕ
Inverse	ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಲೋಮ
Isolated vertex	ವಿವಿಕ್ತ ಶೃಂಗಬಿಂದು
Isosceles	ಸಮದ್ವಿಬಾಹು
Limit	ಮಿತಿ
Linear	ರೇಖೀಯ
Locus.	ಬಿಂದುಪಥ
Logarithm	ಪ್ರತಿಘಾತ
Logical equivalence	ತಾರ್ಕಿಕ ಸಮಾನತೆ
Loop	ಸುರುಳಿ
Mathematical Induction	ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಗಣಿತ ಉದ್ಗಮನ
Multigraph	ಬಹುರೂಪೀನಕ್ಷೆ
Multiple	ಅಪವರ್ತ್ಯ

Multiplier	ಗುಣಕ
Natural number	ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ
Negation	ನಕಾರ
Negative	ಋಣ
Network	ಜಾಲ
Obtuse angle	ಅಧಿಕಕೋನ
Odd vertex	ಬೆಸಶೃಂಗಬಿಂದು
Order	ದರ್ಜೆ, ವರ್ಗ
Ordinate	ಭುಜ, y-ನಿರ್ದೇಶಕ
Orthocentre	ಲಂಬಕೇಂದ್ರ
Oscillatory	ಡೋಲಾಯಮಾನ
Pendant vertex	ತೂಗಾಡುವ ಶೃಂಗಬಿಂದು
Parallelogram	ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ
Partial fraction	ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿ
Partial order	ಆಂಶಿಕ ಕ್ರಮ
Partite	ವಿಭಜಿತ
Path	ಮಾರ್ಗ
Perfect square	ಶುದ್ಧವರ್ಗ
Permutation	ಕ್ರಮಯೋಜನೆ
Plane	ಸಮತಲ
Polyhedra	ಬಹುಮುಖಘನ
Polynomial	ಬಹುಘಾತಪದಿ
Positive	ಧನ
Product	ಗುಣಲಬ್ಧ
Projection	ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ
Proper fraction	ಶುದ್ಧ ಭಿನ್ನರಾಶಿ
Proposition	ಉಕ್ತಿ
Quadrant	ಪಾದ
Quadratic equation	ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ
Quadrilateral	ಚತುರ್ಭುಜ
Radius	ತ್ರಿಜ್ಯ
Real number	ವಾಸ್ತವ (ನೈಜ) ಸಂಖ್ಯೆ
Reciprocal	ವಿಲೋಮ
Recurring	ಪುನರಾವೃತ್ತಿ ಹೊಂದುವ
Reflexion	ಪ್ರತಿಫಲನ
Reflexive	ಆತ್ಮವರ್ತಕ, ಸ್ವತುಲ್ಯ
Regular graph	ಸಮಪರಿಮಾಣ ನಕ್ಷೆ
Remainder theorem	ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ
Restricted	ನಿರ್ಬಂಧಿತ
permutation	ಕ್ರಮಯೋಜನೆ
Rhombus	ವಜ್ರಾಕೃತಿ
Right angle	ಲಂಬಕೋನ
Root	ಮೂಲ
Second degree	ಎರಡನೆಯ ಘಾತ
Sector	ತ್ರಿಜ್ಯಾಖಂಡ
Segment	ಖಂಡ

Series	ಶ್ರೇಢಿ
Sexagesimal system	ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ ಪದ್ಧತಿ
Shape	ಆಕಾರ
Shift	ಸ್ಥಾನಾಂತರ
Side	ಬಾಹು
Size	ಗಾತ್ರ
Similiar triangles	ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಕೋಣಗಳು
Slope	ಓಟ
Square root	ವರ್ಗಮೂಲ
Sum	ಮೊತ್ತ
Symmetric	ಸಮಾಂಗ, ಸಮಮಿತ
Tautology	ನಿತ್ಯಸತ್ಯ
Theorem	ಪ್ರಮೇಯ
Transitive	ಪ್ರವಹನೀಯ
Triangle	ತ್ರಿಕೋಣ, ತ್ರಿಭುಜ
Trigonometry	ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ
Trivial graph	ಕ್ಷುಲಕ ನಕ್ಷೆ
Truth Value	ನಿಜ ಮೌಲ್ಯ
Undefined	ಅನಾಖ್ಯಾತ, ಅವ್ಯಾಖ್ಯಾತ
Unit	ಮೂಲಮಾನ
Unity	ಐಕ್ಯಧಾತು
Variable	ಚರಾಕ್ಷರ
Vertex	ಶೃಂಗ (ಸಂಪಾತ) ಬಿಂದು
Vertices	ಶೃಂಗಗಳು
Vowel	ಸ್ವರ
Walk	ನಡೆ
Wheel graph	ಚಕ್ರ ನಕ್ಷೆ

ಪದವಿ ಪೂರ್ವ 1ನೇ ಮತ್ತು 2ನೇ ವರ್ಷಗಳ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳ ಮಾದರಿ

1) ಪದವಿ ಪೂರ್ವ 1ನೇ ಮತ್ತು 2ನೇ ವರ್ಷಗಳ ಒಂದೊಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ಒಟ್ಟು ಗರಿಷ್ಠ 90 ಅಂಕಗಳಿಗಾಗಿ ತಯಾರಿಸಬೇಕು.

2) ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗ-A, ಭಾಗ-B, ಭಾಗ-C ಮತ್ತು ಭಾಗ-D ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ

   (i) ಭಾಗ-Aನಲ್ಲಿ 1 ಅಂಕದ ಅತಿಚಿಕ್ಕ ಉತ್ತರದ (V.S.A.) ಮಾದರಿಯ 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

   ($10 \times 1 = 10$ ಅಂಕಗಳು)

   (ii) ಭಾಗ-Bನಲ್ಲಿ 2 ಅಂಕಗಳ ಚಿಕ್ಕ ಉತ್ತರದ (S.A.) ಮಾದರಿಯ 12 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಇರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಯಾವುದೇ 10 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ದು ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು.

   ($10 \times 2 = 20$ ಅಂಕಗಳು)

   (iii) ಭಾಗ-Cನಲ್ಲಿ 5 ಅಂಕಗಳ ಲಘು ಲೇಖನ (E.T.) ಮಾದರಿಯ 12 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಇರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಯಾವುದೇ 8 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ದು ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು.

   ($8 \times 5 = 40$ ಅಂಕಗಳು)

   (iv) ಭಾಗ-Dನಲ್ಲಿ 10 ಅಂಕಗಳ 4 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಯಾವುದೇ 2 ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ದು ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲೂ 6 ಅಂಕಗಳ

ದೀರ್ಘ ಉತ್ತರ (L.A.) ಮಾದರಿಯ ಒಂದು ಉಪವಿಭಾಗ ಹಾಗೂ 4 ಅಂಕಗಳ ಇನ್ನೊಂದು ಉಪವಿಭಾಗ ಇರುತ್ತದೆ.

($2 \times 10 = 20$ ಅಂಕಗಳು)

3. ಗರಿಷ್ಠ 90 ಅಂಕಗಳ ಪ್ರಶ್ನ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲದೆ, (i) ಅಭ್ಯಾಸಗಳಿಗೆ (ಅಸೈನ್ಮೆಂಟ್ಸ್) 5 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು (ii) ಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ (ಪ್ರಾಜೆಕ್ಟ್ಸ್) 5 ಅಂಕಗಳು ಹೀಗೆ ಒಟ್ಟು 10 ಅಂಕಗಳು ಮೀಸಲು.

ಪದವಿ ಪೂರ್ವ 1ನೇ ಮತ್ತು 2ನೇ ವರ್ಷಗಳ ಯೋಜನೆಗಳು ಮತ್ತು ನಿಗದಿತ ಅಭ್ಯಾಸಗಳ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ

ಒಂದು ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ವರ್ಷದ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೂ 5 ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 5 ನಿಗದಿತ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಯೋಜನೆಗೂ ನಿಗದಿತ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೂ ಗರಿಷ್ಠ 10 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಇರಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ವಿಂಗಡಿಸಬೇಕು.

(i) ವಿಷಯದ ಉದ್ದೇಶ ಮತ್ತು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆಯ ಸ್ಪಷ್ಟ ಮಂಡನೆ:

2 ಅಂಕಗಳು

(ii) ವಿಷಯದ ಮುಖ್ಯವಾದ ವಸ್ತುವನ್ನು (ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಸಾಧನೆಗಳೊಂದಿಗೆ) ವಿವರಿಸುವುದು.

5 ಅಂಕಗಳು

(iii) ಬಳಸಲಾದ ಗಣಿತ ಪ್ರಮೇಯಗಳ / ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ನಿರೂಪಣೆ.

2 ಅಂಕಗಳು

(iv) ಅಂತ್ಯ ಫಲಿತಾಂಶ : 1 ಅಂಕ

ಐದು ಯೋಜನೆಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟು ಗರಿಷ್ಠ 50 ಅಂಕಗಗಳಿಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ (10ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ) ಗರಿಷ್ಠ 5 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಾಹಾಕಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಐದು ನಿಗದಿತ ಅಭ್ಯಾಸ (ಅಸೈನ್ಮೆಂಟ್ಸ್)ಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟು ಗರಿಷ್ಠ 50 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಳಿಸಿದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ (10ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ) ಗರಿಷ್ಠ 5 ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಪ.ಪೂ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯ ನೀಲಿನಕ್ಷೆ (90 ಅಂಕಗಳು)

		ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಮಾದರಿ	ಜ್ಞಾನಾರ್ಜನೆ			ಗ್ರಹಣ ಶಕ್ತಿ			ಬುದ್ಧಿಸಾಮರ್ಥ್ಯ			ಚಾತುರ್ಯ			
ಅಧ್ಯಾಯ ಸಂಖ್ಯೆ	ಪರಿವಿಡಿ	ಕಲಿಯಲು ಬೇಕಾದ ಸಮಯ (ಘಂಟೆ)	VSA	SA	ET	VSA	SA	ET	VSA	SA	ET	VSA	SA	ET	LA
1.	ಆಂಶಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು	04					1							1	
2.	ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು	05	1								1				
3.	ಗಣಿತಾನುಮಾನ	05			1										
4.	ಸಾಂತಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತ	05						1						1	
5.	ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಿದ್ಧಾಂತ	08			1	1							1		
6.	ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ	07					1		1						1
7.	ಗಣಿತ ತರ್ಕ	08	1				1				1				
8.	ಗಣಗಳು, ಸಂಬಂಧಗಳು, ಉತ್ಪನ್ನಗಳು	10		1		1				1				1	
9.	(i) ಕೋನಮಾನ, ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ, ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಮುಖ್ಯಕೋನಗಳು ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳು, ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರ	13			1		1			1		1			1
	(ii) ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋನಗಳು, ಗುಣಿತ ಮತ್ತು ಉಪಗುಣಿತ ಕೋನಗಳು ಪರಿವರ್ತನ ಸೂತ್ರಗಳು	12			1			1					1		
	(iii) ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣ, ತ್ರಿಕೋಣಗಳ ಪರಿಹಾರ	10		1			1		1					1	

10.	(i) ಲಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಪದ್ಧತಿ	10		1							1	1			
	(ii) ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು	11			1		1		1					1	
	(iii) ಜೋಡಿ ಸರಳರೇಖೆಗಳು	06		1											1
11.	ಮಿತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ	07			1										1
12.	ನಕ್ಷೆಗಳು ಸಿದ್ಧಾಂತ	04	1							1					
	ಒಟ್ಟು	**125**	**3**	**4**	**6**	**2**	**6**	**2**	**3**	**3**	**3**	**2**	**2**	**5**	**4**

ಮಾದರಿ	ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು
ಜ್ಞಾನರ್ಜನೆ	13
ಗ್ರಹಣಶಕ್ತಿ	10
ಬುದ್ಧಿಸಾಮರ್ಥ್ಯ	09
ಚಾತುರ್ಯ	13

ಉತ್ತರಗಳ ಮಾದರಿ	ಅಂಕಗಳು
VSA (ಅತಿಚಿಕ್ಕ ಉತ್ತರ)	1
SA (ಚಿಕ್ಕ ಉತ್ತರ)	2
ET (ಲಘು ಉತ್ತರ)	3/4/5
LA (ದೀರ್ಘಉತ್ತರ)	6

ಪರಾಮರ್ಶನ ಗ್ರಂಥಗಳು

1. *Algebra* by Hall and Knight
2. *Algebra* by Manickavachagam Pillai et al, S.Vishwanath Printers Publishers Pvt. Ltd.
3. *Higher Algebra* by S. Barnard and J.M. Child, Macmillan India Ltd.
4. *Coordinate Geometry* by S.L. Loney
5. *Coordinate Goemetry* by Shantinarayan
6. *Plane Trigonometry* by S.L. Loney
7. *A Text of Trigonometry* by S. Narayan, S. Vishwanath Printers Publishers Pvt. Ltd.
8. *Diffrential Calculus* by S. Balachandra Rao and C.K. Shantha, New Age International (Wiley Eastern Ltd.), New Delhi.
9. *Graph Theory* by V.R. Kulli, Vishwa International Publishers, Gulbarga.
10. *Graph Theory* by Frank Harary , Narosa Publishing House, New Delhi.

ನಿಗದಿತ ಚಟುವಟಿಕೆ ಗ್ರಂಥಗಳು

1. *Indian Mathematics and Astronomy - Some Landmarks* (Rev 3rd Ed. 2004) by Dr. S. Balachandra Rao, Gandhi Centre of Science and Human Values, Bharatiya Vidya Bhavan, Race Cource Road, Bangalore - 560 001.
2. *A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics* by Dr. T.S. Bhanu Murthy, Wiley Eastern Ltd. (New Age International) New Delhi, 1992.

3. *History of Ancient Indian Mathematics* by Dr. C.N. Srinivasa Iyengar, The World Press Pvt. Ltd., Calcutta, 1967

4. *The World of Mathematics* by James R. Newmann, Pub: Simmons and Schuster, New York

5. *Men of Mathematics* by E.T Bell, Penguin Books, Middlesex, 1965

6. *History of Hindu Mathematics* (2 Parts) by B.B. Datta and A.N. Singh, Reprinted : Bhratiya Kala Prakashan, Delhi, 2001

7. *Applications and History of Trigonometry* (16 Pages)

8. *60 Eminent Indian Mathematicians* (With Portraits) - (32 Pages)

9. *Eminent Mathematicians of the 19th Century* by Ganesh Prasad

10. *Remarkable Mathematicians* (from Euler to Von Neumann) by Ioan James, Cambridge University Press, 2003 (Distributors : Foundation Books, Brigade MM, K.R. Road, Jayanagar, Bangalore - 82

Note : Books (7), (8) and (9) above are edited by late Prof. J.N. Kapur and published by Mathematical Sciences Trust Society, C - 766, New Friends Colony, New Delhi - 110 065.

11. ***ಆರ್ಯಭಟ*** - ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್, ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಮಾನವೀಯ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಗಾಂಧೀ ಕೇಂದ್ರ, ಭಾರತೀಯ ವಿದ್ಯಾ ಭವನ, ರೇಸ್‌ಕೋರ್ಸ್ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು - 560 001, (2004)

12. ***ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರವರ್ತಕರು ಮತ್ತು ಸ್ವಾರಸ್ಯಗಳು*** - ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್, ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಮಾನವೀಯ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಗಾಂಧೀ ಕೇಂದ್ರ, ಭಾರತೀಯ ವಿದ್ಯಾ ಭವನ, ರೇಸ್‌ಕೋರ್ಸ್ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು - 560 001, (2004)

13. ***ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಚರಿತ್ರೆ*** - ಡಾ|| ಸಿ.ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸಯ್ಯಂಗಾರ್, ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಮೈಸೂರು, 1958

14. ***ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್*** - (4ನೇ ಮುದ್ರಣ) ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್, ಕನ್ನಡ ಪುಸ್ತಕ ಪ್ರಾಧಿಕಾರ, ಬೆಂಗಳೂರು, 2003

15. ***ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ*** - ಡಾ|| ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರ ರಾವ್, ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಹಂಪಿ, ವಿದ್ಯಾರಣ್ಯ, 1995

16. ***ಗಣಿತಜ್ಞರು*** - ಮಲ್ಲಿಕಾರ್ಜುನ ಯಾಳವಾರ, ಕುಂದರಲಿ, ಬಾಗಲಕೋಟೆ, 2003

ಯೋಜನೆಗಳಿಗೆ ಆಕರ ಗ್ರಂಥಗಳು

The following books are published by Cambridge University Press (Distributors : Foundation Books, C-22, 'C' Block, Brigade MM, K.R. Road, Jayanagar, Bangalore - 560 082)

1. *Mathematics for A and AS Levels Pure Mathematics* The School Mathematics Project, (Cambridge Low Price Edition), Cambridge, U.K., 1997

2. *Mathematical Projects* by Brian Bolt & David Hobbs, Cambridge, U.K, South Asian Edition, 2001

The following low - priced books are published by MSTS Mathematics Librê³ry, C - 766, New Friends Colony, New Delhi - 110 065 :

1. 100 Problems for workshops of training students and teachers (16 pages)
2. The Concept of Mathematics Laboratory (16 pages)
3. Application of Matrices (16 pages)
4. Preparing charts and models for a Mathematics Exhibition (16 pages)
5. Suggested Experiments for a Mathematical Laboratory, Vol -I & II
6. Suggested Activities for a Mathematics Club (32 pages)
7. Magic Squares (156 pages)
8. Magic Squares (16 pages)
9. Dated Magic Squares (16 pages)

ಕನ್ನಡ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನಾ ಕೇಂದ್ರವು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿರುವ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣದ ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಗಣಿತವಿಜ್ಞಾನ ಪಠ್ಯವನ್ನು ತಮ್ಮ ಮುಂದಿಡಲು ನಮಗೆ ಸಂತೋಷವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ ಜಾರಿಗೆ ಬಂದಿರುವ ಹೊಸ ಪಠ್ಯಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯವನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ನಾಡಿನ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ವಿದ್ವಾಂಸರು ಪಾಲುದಾರರಾಗಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಪಠ್ಯವು ನಾಡಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಾವು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಪಠ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸಹೃದಯಿಗಳು ಪಠ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ತಮ್ಮ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಬರೆದು ತಿಳಿಸಿದರೆ ತುಂಬಾ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಆವೃತ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯದ ಗುಣಮಟ್ಟವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ತಮ ಪಡಿಸಬಹುದು.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಜೊತೆ ನಾವು ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಕೈಪಿಡಿಗಳನ್ನು ಸಿದ್ಧ ಪಡಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ನಾವು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತಿರುವ ಪಠ್ಯಗಳಿಗೆ ಪದವಿಪೂರ್ವ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯು ಅಧಿಕೃತ ಮನ್ನಣೆ ನೀಡಿ ನಮ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ ಕೈ ಜೋಡಿಸಿದೆ. ಕರ್ನಾಟಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಬಳಗಕ್ಕೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಜ್ಞಾನವು ಉತ್ತಮ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ದೊರೆಯಬೇಕೆಂಬುದು ನಮ್ಮ ಮುಖ್ಯ ಗುರಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನ ನಡೆದಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ತಮ್ಮ ಆಶೀರ್ವಾದವಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ರೂ. ೧೬೦/-